Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа

Сборник статей

Посвящается

Петру Лаврентьевичу Ульянову

к его семидесятилетию

Москва • АФЦ

Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа

Сборник статей

Посвящается

Петру Лаврентьевичу Ульянову

к его семидесятилетию

Издательство АФЦ

Москва 1999

УДК 517.5

Печатается по решению Отделения математики Российской академии наук.

Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. Сборник статей. – М.: Изд-во АФЦ, 1999. – 272 с.

Статьи, включенные в сборник, – оригинальные работы по теории ортогональных рядов, теории аппроксимации, а также другим актуальным вопросам математического анализа. Сборник посвящается члену-корреспонденту Российской академии наук Петру Лаврентьевичу Ульянову к его семидесятилетию. Представляет интерес для специалистов-математиков, аспирантов и студентов математических факультетов.

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект № 98-01-14021).

Издательство Научно-исследовательского актуарно-финансового центра (АФЦ)
(Лицензия на издательскую деятельность ЛР № 071423 от 10.04.1997)
117966, Москва, ул. Губкина, 8, к. 413.
Тел. 938-37-37. E-mail: izaak@mi.ras.ru

Отпечатано в типографии "Наука"
121099, Москва, Шубинский пер., 6.
Заказ № 917

ISBN 5-93379-002-8

Оглавление

3 мая 1998 года исполнилось 70 лет выдающемуся русскому математику, члену-корреспонденту Российской академии наук, профессору Московского университета Петру Лаврентьевичу Ульянову. Настоящий сборник посвящается этой юбилейной дате.

В статьях, представленных в сборнике, исследуются направления математического анализа, в которых фундаментальные результаты были получены самим П. Л. Ульяновым:

– теория ортогональных рядов,
– теория аппроксимации,
– теоремы вложения,
– теория аналитических функций.

Хочется пожелать Петру Лаврентьевичу и его многочисленным ученикам и последователям новых успехов на благо математической науки.

С. М. Никольский

Об условиях сходимости (ограниченности) в среднем частных сумм тригонометрического ряда

А. С. Белов

Пусть $c_n = \widehat{f}(n)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_{2\pi}$. В статье доказывается, что условие

$$\sum_{k=[n/2]}^{2n} \frac{|c_k| + |c_{-k}|}{|n-k|+1} = o(1) \quad (= O(1))$$

необходимо, а при некоторых достаточно широких условиях на коэффициенты Фурье функции f также и достаточно, для сходимости (соответственно, ограниченности) частных сумм ряда Фурье функции f в метрике L.

Библиография: 10 названий.

1. Будем рассматривать произвольный тригонометрический ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad \left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)\right), \tag{1}$$

записанный в действительной или комплексной форме. При изложении будем использовать обычные обозначения:

$$a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = (c_n - c_{-n})i,$$

$$r_n = \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} = \sqrt{2(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)},$$

$$A_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx),$$

$$S_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k(x), \qquad \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x)$$

при всех $n \geqslant 0$. Если $f \in L_{2\pi}$, то

$$\|f\| = \|f\|_1 = \|f\|_L = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx.$$

Квадратные скобки всюду далее обозначают целую часть числа.

В разделе 2 доказывается следующая

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00094).

Теорема 1. *Для каждого целого $n \geqslant 2$ справедлива оценка*

$$\sum_{k=[n/2]}^{2n} \frac{r_k}{|n-k|+1} \leqslant 100 \max_{m=[n/2]-1,\dots,2n} \|\sigma_m - S_m\|. \tag{2}$$

В частности, верны следующие два утверждения.

a) *Если*

$$\|\sigma_n - S_n\| = o(1) \quad (= O(1)), \tag{3}$$

то

$$\sum_{k=[n/2]}^{2n} \frac{r_k}{|n-k|+1} = o(1) \quad (\textit{соответственно, } O(1)). \tag{4}$$

b) *Если частные суммы ряда* (1) *сходятся* (*ограничены*) *в метрике* L, *то выполнено условие* (4).

Здесь в соотношениях (3) и (4) и всюду далее, как обычно, предполагаем, что n стремится к бесконечности.

В разделе 3 на примере четного тригонометрического ряда

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \tag{5}$$

и нечетного тригонометрического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \tag{6}$$

показывается (см. далее следствие 2), что при некоторых достаточно широких условиях на коэффициенты условие (4) оказывается достаточным для сходимости (ограниченности) в метрике L частных сумм тригонометрического ряда. Естественно, что если не оговорено противное, то к рассматриваемому ряду как вида (5), так и (6) применяем те же обозначения, что и к общему тригонометрическому ряду (1), за исключением одного: для коэффициентов ряда (6) будем использовать обозначение a_n, а не b_n.

Из теоремы 1 немедленно получаем

Следствие 1. a) *Если для ряда* (5) *или* (6) *выполнено условие* (3), *то*

$$\sum_{k=[n/2]}^{2n} \frac{|a_k|}{|n-k|+1} = o(1) \quad (\textit{соответственно, } O(1)). \tag{7}$$

b) *Если частные суммы ряда* (5) *или* (6) *сходятся* (*ограничены*) *в метрике* L, *то выполнено условие* (7).

Для доказательства достаточно заметить, что для ряда (5) или (6) условие (4) совпадает с условием (7).

Как обычно, будем обозначать $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$.

В статье также будет доказана

Теорема 2. *Пусть коэффициенты рассматриваемого ряда* (5) *или* (6) *удовлетворяют условию*

$$\sum_{\nu=n}^{2n-1} |\Delta a_\nu| + \sum_{\nu=n}^{2n-1} \left| \sum_{k=1}^{[\nu/2]} \frac{\Delta a_{\nu-k} - \Delta a_{\nu+k}}{k} \right| = o(1) \quad \bigl(= O(1) \bigr). \tag{8}$$

Тогда для этого ряда условие (3) *эквивалентно условию* (7).

Подчеркнем, что в теореме 2 замена $o(1)$ на $O(1)$, что соответствует случаю в круглых скобках, производится в условиях (3), (7) и (8) одновременно. Это относится и ко всем другим утверждениям этой статьи.

Из теоремы 2 легко вытекает

Следствие 2. *Пусть ряд* (5) *или* (6) *является рядом Фурье и его коэффициенты удовлетворяют условию* (8). *Тогда для сходимости* (*ограниченности*) *частных сумм этого ряда в метрике* L *необходимо и достаточно выполнения условия* (7).

В серии статей С. А. Теляковский [1]–[3] рассматривал ряды (5) и (6) при условии на коэффициенты

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta a_\nu| + \sum_{\nu=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{[\nu/2]} \frac{\Delta a_{\nu-k} - \Delta a_{\nu+k}}{k} \right| < \infty. \tag{9}$$

Из следствия 2 и результатов С. А. Теляковского [1] довольно легко выводится

Теорема 3. *Пусть коэффициенты рядов* (5) *и* (6) *удовлетворяют условию* (9). *Тогда справедливы следующие два утверждения.*

a) *Частные суммы ряда* (5) *сходятся* (*ограничены*) *в метрике* L *тогда и только тогда, когда выполнено условие* (7).

b) *Частные суммы ряда* (6) *сходятся* (*ограничены*) *в метрике* L *тогда и только тогда, когда выполнены условие* (7) *и условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} < \infty. \tag{10}$$

Отметим, что если

$$a_n \ln n = o(1) \quad \bigl(= O(1) \bigr), \tag{11}$$

то условие (7), очевидно, выполнено. Поэтому теоремы 1 и 2 из работы С. А. Теляковского [3], которые утверждают, что при условиях (9) и (11) частные суммы ряда (5), а при дополнительном условии (10) и ряда (6), сходятся (ограничены) в метрике L, являются частными случаями теоремы 3. Отметим также, что если (см. [3]) $\sum |a_n| < \infty$, то условие (9) и, очевидно, (7) выполнены, а условие (11) может не выполняться, т.е. справедливо утверждение, на которое обращал внимание С. А. Теляковский в работе [3], что (11) не является необходимым условием сходимости (ограниченности) частных сумм.

Доказательство теорем 2 и 3 и следствия 2 составляет содержание раздела 3.

Отметим также, что доказательство теоремы 1, которое приведено в разделе 2, основано на идеях, изложенных в заметке [4].

Историю исследования вопросов, близких к рассматриваемому в этой статье, можно найти в монографиях [5; гл. 10], [6; гл. 5] и работах [1]–[3], [7], [8].

2. Далее, кроме обозначений, указанных в начале этой статьи, используется также стандартное обозначение

$$\widetilde{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{A}_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\bigl(a_k \sin(kx) - b_k \cos(kx)\bigr) = -i\sum_{k=0}^{n}(c_k e^{ikx} - c_{-k}e^{-ikx}),$$

$n \geqslant 0$, для частной суммы сопряженного ряда.

В основе доказательства теоремы 1 лежит следующая

Лемма 1. *Для произвольного тригонометрического ряда* (1) *и любого натурального числа n при всех $N = n, \dots, 2n+1$ справедливы оценки*:

$$\max_{k=n,\dots,N} \|\widetilde{S}_k - \widetilde{S}_{n-1}\| \leqslant 2 \max_{k=n,\dots,N} \|S_k - S_{n-1}\|; \tag{12}$$

$$\max_{k=n,\dots,N} \left\|\sum_{j=n}^{k} c_j e^{ijx}\right\| \leqslant \frac{3}{2} \max_{k=n,\dots,N} \|S_k - S_{n-1}\|; \tag{13}$$

$$\max_{k=n,\dots,N} \left\|\sum_{j=n}^{k} c_{-j} e^{-ijx}\right\| \leqslant \frac{3}{2} \max_{k=n,\dots,N} \|S_k - S_{n-1}\|; \tag{14}$$

$$\max_{k=n,\dots,N} \|S_k - S_{n-1}\| \leqslant 4 \max_{k=n-1,\dots,N} \|\sigma_k - S_k\|; \tag{15}$$

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{r_k}{k+1-n} \leqslant 15 \max_{k=n,\dots,N} \|S_k - S_{n-1}\|; \tag{16}$$

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{r_k}{N+1-k} \leqslant 10\|S_N - S_{n-1}\|. \tag{17}$$

Доказательство. Для любых натуральных $m \geqslant n$ из легко проверяемого равенства

$$\widetilde{S}_{n-1}(x) - \widetilde{S}_m(x) = \frac{1}{m}\bigl(S'_m(x) - S'_{n-1}(x)\bigr) + \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k(k+1)}\bigl(S'_k(x) - S'_{n-1}(x)\bigr)$$

и хорошо известного (см. [9; гл. 10, теоремы 3.13 и 3.16]) неравенства Бернштейна–Зигмунда $\|S'_k - S'_{n-1}\| \leqslant k\|S_k - S_{n-1}\|$ имеем

$$\|\widetilde{S}_m - \widetilde{S}_{n-1}\| \leqslant \frac{1}{m}\|S'_m - S'_{n-1}\| + \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k(k+1)}\|S'_k - S'_{n-1}\|$$
$$\leqslant \|S_m - S_{n-1}\| + \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{(k+1)}\|S_k - S_{n-1}\|$$
$$\leqslant \left(1 + \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k+1}\right) \max_{k=n,\dots,m} \|S_k - S_{n-1}\|.$$

Отсюда для натуральных $n \leqslant N$ сразу получаем

$$\max_{m=n,\dots,N} \|\widetilde{S}_m - \widetilde{S}_{n-1}\| \leqslant \left(1 + \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{k+1}\right) \max_{k=n,\dots,N} \|S_k - S_{n-1}\|. \tag{18}$$

Поскольку $N \leqslant 2n + 1$, то

$$1 + \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{k+1} \leqslant 1 + \frac{(N-n)}{n+1} = \frac{N+1}{n+1} \leqslant 2$$

и из (18) следует оценка (12).

Так как

$$2\sum_{j=n}^{m} c_j e^{ijx} = \big(S_m(x) - S_{n-1}(x)\big) + i\big(\widetilde{S}_m(x) - \widetilde{S}_{n-1}(x)\big),$$

то

$$2 \max_{m=n,\dots,N} \left\|\sum_{j=n}^{m} c_j e^{ijx}\right\| \leqslant \max_{m=n,\dots,N} \|S_m - S_{n-1}\| + \max_{m=n,\dots,N} \|\widetilde{S}_m - \widetilde{S}_{n-1}\|.$$

Отсюда и из (12) сразу вытекает (13). Совершенно аналогично из равенства

$$2\sum_{j=n}^{m} c_{-j} e^{-ijx} = \big(S_m(x) - S_{n-1}(x)\big) - i\big(\widetilde{S}_m(x) - \widetilde{S}_{n-1}(x)\big)$$

следует оценка (14).

Из легко проверяемого равенства

$$S_m(x) - S_{n-1}(x) = \frac{(m+1)}{m}\big(S_m(x) - \sigma_m(x)\big)$$
$$+ \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k}\big(S_k(x) - \sigma_k(x)\big) - \big(S_{n-1}(x) - \sigma_{n-1}(x)\big)$$

имеем

$$\|S_m - S_{n-1}\| \leqslant \frac{(m+1)}{m}\|S_m - \sigma_m\| + \sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k}\|S_k - \sigma_k\| + \|S_{n-1} - \sigma_{n-1}\|$$
$$\leqslant \left(2 + \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k}\right) \cdot \max_{k=n-1,\dots,m}\|S_k - \sigma_k\|.$$

Отсюда следует оценка

$$\max_{m=n,\dots,N}\|S_m - S_{n-1}\| \leqslant \left(2 + \sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k}\right) \max_{k=n-1,\dots,N}\|S_k - \sigma_k\|,$$

из которой сразу вытекает (15) при $n = 1$, а при $n \geqslant 2$ следует в силу того, что

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k} \leqslant \frac{N+1-n}{n} \leqslant 2.$$

По известному неравенству Харди (см. [6; гл. 7, теорема 8.7]) из (13) имеем

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{|c_k|}{k+1-n} \leqslant \pi\left\|\sum_{j=n}^{N} c_j e^{ijx}\right\| \leqslant \frac{3}{2}\pi \max_{k=n,\dots,N}\|S_k - S_{n-1}\|.$$

Аналогично, из (14) получаем

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{|c_{-k}|}{k+1-n} \leqslant \frac{3}{2}\pi \max_{k=n,\dots,N}\|S_k - S_{n-1}\|.$$

Отсюда вытекает (16), поскольку

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{r_k}{k+1-n} \leqslant \sqrt{2}\sum_{k=n}^{N}\frac{(|c_k| + |c_{-k}|)}{k+1-n}$$
$$\leqslant 3\sqrt{2}\pi \max_{k=n,\dots,N}\|S_k - S_{n-1}\|$$
$$\leqslant 15 \max_{k=n,\dots,N}\|S_k - S_{n-1}\|.$$

Так как

$$S_N(x) - S_{n-1}(x) = \sum_{j=n}^{N} c_j e^{ijx} + \sum_{j=n}^{N} c_{-j} e^{-ijx},$$

то опять по неравенству Харди получаем

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{|c_k|}{N+1-k} \leqslant \pi\|S_N - S_{n-1}\|$$

и

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{|c_{-k}|}{N+1-k} \leqslant \pi \|S_N - S_{n-1}\|.$$

Поэтому

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{r_k}{N+1-k} \leqslant \sqrt{2} \sum_{k=n}^{N} \frac{(|c_k| + |c_{-k}|)}{N+1-k} \leqslant 2\sqrt{2}\,\pi \|S_N - S_{n-1}\| \leqslant 3\pi \|S_N - S_{n-1}\|,$$

т.е. неравенство (17) верно даже для любых натуральных $N \geqslant n$.

Лемма 1 полностью доказана.

Отметим, что некоторые возможные усиления неравенств (12)–(16) кратко изложены в конце статьи в замечаниях 1–5. В частности, в них доказано, что максимумы в оценках (12), (13), (14) и (16) не являются существенными, а в оценке (15) максимум справа использован по существу. Чтобы не отвлекаться от основной цели изложения, то есть доказательства теорем 1–3, обсуждение тех из вариантов оценок (12)–(16), которые нам также представляются интересными и полезными, мы вынесли в конец статьи в замечания 1–5.

Доказательство теоремы 1. По лемме 1 из (16) и (15) имеем неравенство

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{r_k}{k+1-n} \leqslant 15 \max_{k=n,\dots,2n} \|S_k - S_{n-1}\| \leqslant 60 \max_{k=n-1,\dots,2n} \|\sigma_k - S_k\|,$$

а из (17) и (15), поскольку $2[n/2]+1 \geqslant n$, неравенство

$$\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} \frac{r_k}{n+1-k} \leqslant 10 \|S_n - S_{[n/2]-1}\| \leqslant 40 \max_{k=[\frac{n}{2}]-1,\dots,n} \|\sigma_k - S_k\|.$$

Складывая эти два неравенства, получим оценку (2).

Из (2) и (3) немедленно вытекает (4).

Наконец, если частные суммы ряда (1) сходятся (ограничены) в метрике L, то (см. [5; гл. 1, § 60]) выполнено условие (3), а значит и (4). Теорема 1, а вместе с ней и следствие 1 доказаны.

3. Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 2, докажем несколько несложных лемм.

Лемма 2. *Для произвольного тригонометрического ряда* (1) *и любого натурального числа* n *справедлива оценка*

$$\|\sigma_n - S_n\| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} \|S_j - S_{[j/2]}\| + 2 \cdot \max_{k=[n/2],\dots,n} \|S_k - S_{[n/2]}\|. \tag{19}$$

В частности, если

$$\max_{k=[n/2],\dots,n} \|S_k - S_{[n/2]}\| = o(1) \quad (= O(1)), \tag{20}$$

то выполнено условие (3).

Доказательство. Из легко проверяемого равенства

$$(n+1)\big(S_n(x)-\sigma_n(x)\big)=\sum_{j=1}^{n-1}\big(S_j(x)-S_{[j/2]}(x)\big)+n\big(S_n(x)-S_{[n/2]}(x)\big)$$
$$-\sum_{j=[n/2]+1}^{n-1}2\big(S_j(x)-S_{[n/2]}(x)\big)$$

имеем

$$\begin{aligned}(n+1)\|S_n-\sigma_n\| &\leqslant \sum_{j=1}^{n-1}\|S_j-S_{[j/2]}\|+n\|S_n-S_{[n/2]}\|\\ &\quad+\sum_{j=[n/2]+1}^{n-1}2\|S_j-S_{[n/2]}\|\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n-1}\|S_j-S_{[j/2]}\|+n\|S_n-S_{[n/2]}\|\\ &\quad+2(n-[n/2]-1)\max_{k=[n/2],\dots,n}\|S_k-S_{[n/2]}\|\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n-1}\|S_j-S_{[j/2]}\|+(2n-1)\max_{k=[n/2],\dots,n}\|S_k-S_{[n/2]}\|.\end{aligned}$$

Отсюда сразу вытекает (19).

Если имеет место (20), то правая часть (19) будет $o(1)$ (соответственно, $O(1)$), и поэтому будет выполнено (3).

Лемма 2 доказана.

Заметим, что если выполнено условие

$$\max_{k=n,\dots,2n}\|S_k-S_{n-1}\|=o(1)\quad\big(=O(1)\big),\tag{21}$$

то будет выполнено и (20), поскольку $2([n/2]+1)>n$ при целых n. Нетрудно доказать, хотя нам это и не потребуется, что из условия (20) вытекает (21).

Перейдем теперь к рассмотрению рядов (5) и (6). Для удобства записи введем обозначение

$$\theta a_\nu=\sum_{k=1}^{[\nu/2]}\frac{\Delta a_{\nu-k}-\Delta a_{\nu+k}}{k}\quad\text{при}\quad \nu\geqslant 2.$$

Аналогично, заменой буквы определяются θb_ν, θd_ν, и так далее. Поскольку

$$\theta a_\nu=\frac{a_{\nu-[\nu/2]}}{[\nu/2]}+\sum_{k=\nu-[\nu/2]+1}^{\nu-1}\frac{a_k}{(\nu-k)(\nu+1-k)}-a_\nu-a_{\nu+1}$$
$$+\sum_{k=\nu+2}^{\nu+[\nu/2]}\frac{a_k}{(k-\nu-1)(k-\nu)}+\frac{a_{\nu+1+[\nu/2]}}{[\nu/2]},$$

то верна оценка

$$|\theta a_\nu| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} s_k^\nu \, |a_k|, \tag{22}$$

где

$$s_k^\nu = \begin{cases} \big((\nu-k)(\nu+1-k)\big)^{-1} & \text{при } k = \nu - [\nu/2]+1,\dots,\nu-1; \\ 1 & \text{при } k = \nu, \nu+1; \\ \big((k-\nu-1)(k-\nu)\big)^{-1} & \text{при } k = \nu+2,\dots,\nu+[\nu/2]; \\ [\nu/2]^{-1} & \text{при } k = \nu-[\nu/2], \nu+1+[\nu/2]; \\ 0 & \text{при } k < \nu-[\nu/2] \text{ или } k > \nu+1+[\nu/2], \end{cases}$$

то есть

$$s_k^\nu = \begin{cases} \big((\nu-k)(\nu+1-k)\big)^{-1} & \text{при } k+1 \leqslant \nu \leqslant 2k-2; \\ 1 & \text{при } k-1 \leqslant \nu \leqslant k; \\ \big((k-\nu-1)(k-\nu)\big)^{-1} & \text{при } 2k/3 \leqslant \nu \leqslant k-2; \\ [\nu/2]^{-1} & \text{при } 3\nu \in \{2k-2, 2k-1, 6k-3, 6k\}; \\ 0 & \text{при } \nu > 2k \text{ или } \nu < [2k/3]. \end{cases}$$

Прежде всего заметим, что при каждом натуральном k и любом целом $\tau \geqslant 2$ справедливы оценки

$$\sum_{\nu=2}^{\tau} s_k^\nu \leqslant \frac{2}{k-\tau} \qquad \text{при} \quad \tau < k \tag{23}$$

и

$$\sum_{\nu=\tau}^{\infty} s_k^\nu \leqslant \frac{3}{\tau-k+1} \quad \text{при} \quad \tau \geqslant k. \tag{24}$$

Действительно, из определения видим, что

$$\sum_{\nu=2}^{\tau} s_k^\nu = 0 \quad \text{при} \quad \tau < [2k/3] \tag{25}$$

и

$$\sum_{\nu=\tau}^{\infty} s_k^\nu = 0 \quad \text{при} \quad \tau \geqslant 2k+1. \tag{26}$$

Если $[2k/3] \leqslant \tau \leqslant k-2$ и k не делится на 3, то

$$\sum_{\nu=2}^{\tau} s_k^\nu = \frac{1}{k-\tau-1},$$

а если k делится на 3, то

$$\sum_{\nu=2}^{\tau} s_k^{\nu} = \frac{1}{k-\tau-1} - \frac{3}{k}.$$

Поскольку $s_k^{k-1} = 1$ при $k \geqslant 3$, то (23) следует из сказанного очевидным образом. Если $k+1 \leqslant \tau \leqslant 2k-1$, то

$$\sum_{\nu=\tau}^{\infty} s_k^{\nu} = \frac{1}{\tau-k} + \frac{1}{k}.$$

Поскольку $s_k^k = 1$ при $k \geqslant 2$ и $s_k^{2k} = 1/k$ при $k \geqslant 1$, то (24) вытекает совсем легко. В частности, из (23) при $\tau = k-1$ и (24) при $\tau = k$ следует, что

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} s_k^{\nu} \leqslant 5 \quad \text{при всех} \quad k \geqslant 1.$$

Поэтому (см. [3]) всегда

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} |\theta a_\nu| \leqslant 5 \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

что, конечно, содержательно только тогда, когда последний ряд сходится.

Для удобства записи введем обозначение

$$K_n = \sum_{k=[n/2]}^{2n} \frac{|a_k|}{|n-k|+1} \quad \text{при} \quad n \geqslant 2. \tag{27}$$

Лемма 3. *Пусть целое число $n \geqslant 2$ и $b_k = 0$, $d_k = a_k$ при $k = 0, \ldots, n-1$, $b_k = a_k$, $d_k = 0$ при $k \geqslant n$, Тогда $a_k = b_k + d_k$ при $k \geqslant 0$ и*

a) *для любого целого $\tau \geqslant n-1$ справедлива оценка*

$$\left| \sum_{\nu=2}^{\tau} |\theta b_\nu| - \sum_{\nu=n}^{\tau} |\theta a_\nu| \right| \leqslant 3 \sum_{k=[\frac{n+1}{2}]}^{[\frac{3n}{2}]} \frac{|a_k|}{|n-k|+1} \leqslant 3K_n; \tag{28}$$

b) *верна оценка*

$$\left| \sum_{\nu=2}^{\infty} |\theta d_\nu| - \sum_{\nu=2}^{n-1} |\theta a_\nu| \right| \leqslant 3 \sum_{k=[\frac{n+1}{2}]}^{[\frac{3n}{2}]} \frac{|a_k|}{|n-k|+1} \leqslant 3K_n. \tag{29}$$

Доказательство. В силу (22), (25) и (23) имеем

$$\sum_{\nu=2}^{n-1}|\theta b_\nu| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{n-1}s_k^\nu|b_k| = \sum_{k=n}^{\infty}\left(\sum_{\nu=2}^{n-1}s_k^\nu\right)|a_k|$$
$$= \sum_{k=n}^{[\frac{3n}{2}]}\left(\sum_{\nu=2}^{n-1}s_k^\nu\right)|a_k| \leqslant \sum_{k=n}^{[\frac{3n}{2}]}\frac{2}{k+1-n}|a_k|.$$

Из (22), (26) и (24) вытекает оценка

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}|\theta d_\nu| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=n}^{\infty}s_k^\nu|d_k| = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}s_k^\nu\right)|a_k|$$
$$= \sum_{k=[\frac{n+1}{2}]}^{n-1}\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}s_k^\nu\right)|a_k| \leqslant \sum_{k=[\frac{n+1}{2}]}^{n-1}\frac{3}{n-k+1}|a_k|.$$

Отсюда, поскольку $\theta a_\nu = \theta b_\nu + \theta d_\nu$, получаем

$$\left|\sum_{\nu=2}^{\tau}|\theta b_\nu| - \sum_{\nu=n}^{\tau}|\theta a_\nu|\right| \leqslant \sum_{\nu=2}^{n-1}|\theta b_\nu| + \sum_{\nu=n}^{\tau}|\theta d_\nu| \leqslant \sum_{k=[\frac{n+1}{2}]}^{[\frac{3n}{2}]}\frac{3|a_k|}{|n-k|+1}$$

и оценка (28) доказана. Аналогично,

$$\left|\sum_{\nu=2}^{\infty}|\theta d_\nu| - \sum_{\nu=2}^{n-1}|\theta a_\nu|\right| \leqslant \sum_{\nu=2}^{n-1}|\theta b_\nu| + \sum_{\nu=n}^{\infty}|\theta d_\nu| \leqslant \sum_{k=[\frac{n+1}{2}]}^{[\frac{3n}{2}]}\frac{3|a_k|}{|n-k|+1}$$

и оценка (29) также доказана.

Заметим, что оценку (28) можно рассматривать как вариант леммы С. А. Теляковского из работы [3], с несколько улучшенной оценкой остаточного члена.

Лемма 4. *Пусть целые $m \geqslant n \geqslant 2$ и $v_k = a_k$ при $k = n, \dots, m$, $v_k = 0$ при $k = 0, \dots, n-1$ и $k > m$. Тогда справедлива оценка*

$$\left|\sum_{\nu=2}^{\infty}|\theta v_\nu| - \sum_{\nu=n}^{m}|\theta a_\nu|\right| \leqslant 3K_n + 3K_{m+1}. \tag{30}$$

Доказательство. Определим последовательность $\{b_k\}$ так же, как и в формулировке леммы 3. Поскольку $v_k = b_k$ при $k = 0, \dots, m$, то по утверждению b) леммы 3, примененному к последовательности $\{b_k\}$, имеем

$$\left|\sum_{\nu=2}^{\infty} |\theta v_\nu| - \sum_{\nu=2}^{m} |\theta b_\nu|\right| \leqslant 3 \sum_{k=[\frac{m+2}{2}]}^{[\frac{3(m+1)}{2}]} \frac{|b_k|}{|k-m-1|+1}$$

$$\leqslant 3 \sum_{k=[\frac{m+2}{2}]}^{[\frac{3(m+1)}{2}]} \frac{|a_k|}{|k-m-1|+1} \leqslant 3K_{m+1}.$$

По утверждению а) леммы 3 получаем

$$\left|\sum_{\nu=2}^{m} |\theta b_\nu| - \sum_{\nu=n}^{m} |\theta a_\nu|\right| \leqslant 3K_n.$$

Складывая две полученные оценки, приходим к (30).

Условимся, что всюду далее буква C обозначает достаточно большую абсолютную положительную постоянную, в каждом случае свою.

Лемма 5. *Пусть целые $m \geqslant n \geqslant 2$. Тогда справедливы оценки*

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} a_k \cos(kx)\right\| \leqslant C\left(\sum_{k=n}^{m-1} |\Delta a_k| + \sum_{\nu=n}^{m} |\theta a_\nu| + K_n + K_{m+1}\right) \tag{31}$$

и

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} a_k \sin(kx)\right\| \leqslant C\left(\sum_{k=n}^{m-1} |\Delta a_k| + \sum_{\nu=n}^{m} |\theta a_\nu| + K_n + K_{m+1} + \sum_{k=n}^{m} \frac{|a_k|}{k}\right). \tag{32}$$

Доказательство. Определим последовательность $\{v_k\}$ так же, как и в формулировке леммы 4. Как показал С. А. Теляковский [1; теорема 1], верна оценка

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} a_k \cos(kx)\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} v_k \cos(kx)\right\| \leqslant C\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta v_k| + \sum_{\nu=2}^{\infty} |\theta v_\nu|\right).$$

Поскольку (см. (27)) $K_n \geqslant |a_n|$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta v_k| = |a_n| + \sum_{k=n}^{m-1} |\Delta a_k| + |a_m| \leqslant 2|a_n| + 2\sum_{k=n}^{m-1} |\Delta a_k|$$

и, в силу (30),

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}|\theta v_\nu| \leqslant \sum_{\nu=n}^{m}|\theta a_\nu| + 3K_n + 3K_{m+1},$$

то оценка (31) доказана.

Аналогично, из оценки С. А. Теляковского [1; теорема 2]

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} v_k \sin(kx)\right\| \leqslant C\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta v_k| + \sum_{\nu=2}^{\infty}|\theta v_\nu| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|v_k|}{k}\right),$$

получаем оценку (32).

Из доказательства леммы 5 видно, что оценки (31) и (32), по сути, являются следствием, хотя и не очевидным, теорем 1 и 2 из работы С. А. Теляковского [1].

Доказательство теоремы 2. По следствию 1 из условия (3) вытекает условие (7).

Предположим теперь, что выполнены условия (7) и (8). На протяжении этого доказательства будем обозначать через $S_n(x)$ и $\widetilde{S}_n(x)$ соответственно частные суммы ряда (5) и его сопряженного ряда (6). Из оценки (31) при целых $n \geqslant 2$ имеем неравенство

$$\max_{m=n,\dots,2n}\|S_m - S_{n-1}\| \leqslant C\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k| + \sum_{\nu=n}^{2n}|\theta a_\nu| + \max_{m=n,\dots,2n+1}|K_m|\right),$$

правая часть которого, в силу (7), (8) и (27) есть $o(1)$ (соответственно, $O(1)$). Поэтому выполнено условие (21), а значит и (20). По лемме 2 заключаем, что выполнено условие (3). В силу (12) для частных сумм ряда (6) также получаем оценку

$$\max_{m=n,\dots,2n}\|\widetilde{S}_m - \widetilde{S}_{n-1}\| = o(1) \quad \big(\text{соответственно}, O(1)\big), \tag{33}$$

из которой также выводим условие вида (3), но уже для частных сумм ряда (6), т.е. условие

$$\max_{m=n,\dots,2n}\|\widetilde{\sigma}_n - \widetilde{S}_n\| = o(1) \quad \big(\text{соответственно}, O(1)\big). \tag{34}$$

Теорема 2 доказана.

Отметим, что в силу (12), (15) и (19), условия (3), (21), (20), (33) и (34) эквивалентны между собой.

Отметим также, что при доказательстве теоремы 2 условие (33) можно, если угодно, легко вывести и из оценки (32).

Далее под $S_n(x)$ снова будем понимать частные суммы того ряда (5) или (6), который рассматривается.

Доказательство следствия 2. Необходимость уже доказана в следствии 1. Поскольку по теореме 2 условие (7) эквивалентно условию (3), то достаточность сразу следует (см. [5; гл. 1, § 60]) из суммируемости ряда Фурье функции f в метрике L методом средних арифметических. Следствие 2 доказано.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что выполнены условия (9) и (7), а значит и (8). Из (9) вытекает, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует и конечен. Из условия (7) видим, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Тогда из теорем 1 и 2 С. А. Теляковского [1] заключаем, что ряд (5), а при условии (10) и ряд (6), является рядом Фурье. Поэтому по следствию 2 частные суммы ряда (5), а при условии (10) и ряда (6), сходятся (ограничены) в метрике L тогда и только тогда, когда выполнено условие (7). Этим доказана достаточность условий в утверждениях a) и b) теоремы 3 и необходимость в утверждении a). Утверждение a) полностью доказано.

Докажем теперь необходимость в утверждении b). Пусть частные суммы ряда (6) сходятся (ограничены) в метрике L. Тогда по следствию 1 справедливо условие (7). В силу уже доказанного утверждения a) частные суммы ряда (5) также сходятся (ограничены) в метрике L. Поэтому частные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}$ будут ограничены в метрике L. Поскольку по неравенству Харди (см. [6; гл. 7, теорема 8.7])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n} \leqslant \pi \sup_{N\geqslant 1} \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx} \right\|,$$

то условие (10) будет выполнено. Теорема 3 полностью доказана.

Замечание 1. Если $f \in L^p_{2\pi}$, то пусть, как обычно,

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \quad \text{при} \quad p \in [1, \infty),$$
$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_x |f(x)| \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

Отметим, что оценки (12)–(15) из леммы 1, справедливая при всех натуральных $n \leqslant N$ оценка (18) и оценка (19) из леммы 2, а также и их доказательства останутся верными, если в них в качестве нормы $\|\cdot\|$ взять $\|\cdot\|_p$ для любого $p \in [1, \infty]$.

Замечание 2. Отметим, что в правой части неравенства (16) максимум не является существенным. Лемма 1 останется верной, если неравенство (16) заменить на неравенство

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{r_k}{k+1-n} \leqslant 30 \, \|S_N - S_{n-1}\|_1. \tag{35}$$

Действительно, поскольку

$$2i \sum_{j=n}^{N} j c_j e^{ijx} = \big(S'_N(x) - S'_{n-1}(x)\big) + i\big(\widetilde{S}'_N(x) - \widetilde{S}'_{n-1}(x)\big),$$

то по известным (см. [9; гл. 10, неравенства (3.18) и (3.25)]) неравенствам Зигмунда при $p \in [1, \infty]$ имеем

$$2\left\|\sum_{j=n}^{N} jc_j e^{ijx}\right\|_p \leqslant \|S'_N - S'_{n-1}\|_p + \|\widetilde{S}'_N - \widetilde{S}'_{n-1}\|_p \leqslant 2N\|S_N - S_{n-1}\|_p. \quad (36)$$

Отсюда по неравенству Харди (см. [6; гл. 7, теорема 8.7]) получаем

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{k|c_k|}{k+1-n} \leqslant \pi\left\|\sum_{j=n}^{N} jc_j e^{ijx}\right\|_1 \leqslant \pi N\|S_N - S_{n-1}\|_1.$$

Аналогично,

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{k|c_{-k}|}{k+1-n} \leqslant \pi N\|S_N - S_{n-1}\|_1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{N} \frac{r_k}{k+1-n} &\leqslant \frac{\sqrt{2}}{n}\sum_{k=n}^{N} \frac{k(|c_k| + |c_{-k}|)}{k+1-n} \\ &\leqslant \frac{2\sqrt{2}\,\pi N}{n}\|S_N - S_{n-1}\|_1 \leqslant 10\,\frac{N}{n}\,\|S_N - S_{n-1}\|_1.\end{aligned}$$

Таким образом, при всех натуральных $n \leqslant N$ справедлива оценка

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{r_k}{k+1-n} \leqslant 10\,\frac{N}{n}\,\|S_N - S_{n-1}\|_1. \quad (37)$$

По условию леммы 1 число $N \leqslant 3n$. Поэтому из оценки (37) вытекает, что неравенство (16) в лемме 1 можно заменить на неравенство (35).

Замечание 3. Для рядов с лакунами оценки (16), (35) и (17), а значит и теорему 1, можно несколько усилить, применяя обобщенное неравенство Харди [10].

Замечание 4. Хотя неравенства (12), (13) и (14) просто доказываются и удобны для доказательства теоремы 1, отметим, что максимумы в этих неравенствах не являются существенными. Оказывается, для любых натуральных n и $N = n, \dots, 3n$ при всех $p \in [1, \infty]$ верны оценки

$$\begin{aligned}\|\widetilde{S}_N - \widetilde{S}_{n-1}\|_p &\leqslant 6\,\|S_N - S_{n-1}\|_p, \\ \Big\|\sum_{j=n}^{N} c_j e^{ijx}\Big\|_p &\leqslant 3\,\|S_N - S_{n-1}\|_p, \\ \Big\|\sum_{j=n}^{N} c_{-j} e^{-ijx}\Big\|_p &\leqslant 3\,\|S_N - S_{n-1}\|_p.\end{aligned} \quad (38)$$

Действительно, при любых натуральных $n \leqslant N$ по неравенству (36) и неравенству Бернштейна–Зигмунда имеем

$$N\left\|\sum_{j=n}^{N} c_j e^{ijx}\right\|_p \leqslant \left\|\sum_{j=n}^{N} jc_j e^{ijx}\right\|_p + \left\|\sum_{j=n}^{N}(N-j)c_j e^{ijx}\right\|_p$$
$$\leqslant N\left\|S_N - S_{n-1}\right\|_p + \left\|\sum_{j=n}^{N}(N-j)c_j e^{i(j-N)x}\right\|_p$$
$$\leqslant N\left\|S_N - S_{n-1}\right\|_p + (N-n)\left\|\sum_{j=n}^{N} c_j e^{i(j-N)x}\right\|_p.$$

Отсюда немедленно следует неравенство

$$n\left\|\sum_{j=n}^{N} c_j e^{ijx}\right\|_p \leqslant N\left\|S_N - S_{n-1}\right\|_p.$$

Аналогично получается неравенство

$$n\left\|\sum_{j=n}^{N} c_{-j} e^{-ijx}\right\|_p \leqslant N\left\|S_N - S_{n-1}\right\|_p.$$

Таким образом, для любого $p \in [1,\infty]$ и любых натуральных $n \leqslant N$ справедливы оценки

$$\left\|\sum_{j=n}^{N} c_j e^{ijx}\right\|_p \leqslant \frac{N}{n}\left\|S_N - S_{n-1}\right\|_p,$$
$$\left\|\sum_{j=n}^{N} c_{-j} e^{-ijx}\right\|_p \leqslant \frac{N}{n}\left\|S_N - S_{n-1}\right\|_p,$$
$$\|\widetilde{S}_N - \widetilde{S}_{n-1}\|_p \leqslant 2\frac{N}{n}\left\|S_N - S_{n-1}\right\|_p.$$

Если $N \leqslant 3n$, то из этих оценок сразу следуют оценки (38). Конечно, постоянные в оценках (38) не являются точными. Несколько более усложненные выкладки позволяют при тех же условиях заменить в первой оценке (38) постоянную 6 на $8/\pi$, а в двух других оценках (38) заменить 3 на $4/\pi$.

Замечание 5. Отметим, что максимум в правой части оценки (15) существен, т.е. нельзя одновременно убрать максимумы и в левой и в правой частях оценки (15). Для доказательства достаточно при каждом натуральном n и $N = 2n$ рассмотреть тригонометрический полином

$$S(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}(N+1-k)\cos(kx).$$

Не очень трудно видеть, что для частных сумм и средних арифметических этого полинома справедливы оценки

$$\|\sigma_N - S_N\|_1 \leqslant 1, \qquad \|S_N - S_{n-1}\|_1 \asymp \ln(n+1).$$

Отметим также, что если в (15) рассмотреть норму, соответствующую случаю $p = \infty$, то для каждого натурального n и $N = 2n$ существенность максимума показывает полином

$$S(x) = \sum_{k=n+1}^{N} n \frac{\cos(kx)}{k(k-n)} - \sum_{k=1}^{n-1} n \frac{\cos(kx)}{k(k-n)}.$$

В этом случае нетрудно доказать, что

$$\|S_N - S_{n-1}\|_\infty \asymp \ln(n+1), \quad \text{а} \quad \|\sigma_N - S_N\|_\infty \leqslant C,$$

где C - абсолютная положительная постоянная.

Из изложенного следует, что максимум в правой части оценки (15) и для нормы, соответствующей случаю $p = 1$, и для нормы, соответствующей случаю $p = \infty$, существен.

Список литературы

[1] Теляковский С. А. Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. №6. С. 1209–1236.

[2] Теляковский С. А. Асимптотическая оценка интеграла от модуля функции, заданной рядом из синусов // Сиб. матем. журн. 1967. Т. 8. №6. С. 1416–1422.

[3] Теляковский С. А. К вопросу о сходимости рядов Фурье в метрике L // Матем. заметки. 1967. Т. 1. №1. С. 91–98.

[4] Белов А. С. Об условиях сходимости в среднем тригонометрических рядов Фурье // Тезисы докладов международной конференции "Теория приближений и гармонический анализ" (Тула, 26–29 мая 1998 г.). Тула, 1998. С. 38–40.

[5] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

[6] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.

[7] Фомин Г. А. О некоторых условиях сходимости рядов Фурье в метрике L // Матем. заметки. 1977. Т. 21. №4. С. 587–592.

[8] Фомин Г. А. Об одном классе тригонометрических рядов // Матем. заметки. 1978. Т. 23. №2. С. 213–222.

[9] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.

[10] McGehee O. C., Pigno L., Smith B. Hardy's inequality and the L^1-norm of exponential sums // Ann. of Math. (2). 1981. V. 113. №3. P. 613–618.

Ивановский государственный университет
E-mail: `math@ivgu.polytech.ivanovo.su`

Оценки L_p-модулей непрерывности на областях с нерегулярной границей и теоремы вложения

О. В. Бесов

В работе изучаются дифференцируемые функции многих переменных на области $G \subset \mathbb{R}$ с нерегулярной границей. На основе нового интегрального представления функций устанавливаются оценки L_p-модулей непрерывности и теоремы вложения пространств функций с заданным поведением L_p-модулей непрерывности.

Библиография: 5 названий.

В работе изучаются дифференцируемые функции многих переменных, заданные на области $G \subset \mathbb{R}^n$, гладкость которых характеризуется поведением L_p-модулей непрерывности. Граница области G не является, вообще говоря, локально липшицевой и может содержать пики (с нулевыми углами), гребни (с нулевыми углами) и т. д. Для определенных классов таких областей устанавливаются оценки L_q-модулей непрерывности через L_p-модули непрерывности ($1 \leqslant p < q \leqslant \infty$), оценки L_q-норм функций через L_p-модули непрерывности и т. п. На основе этих оценок доказываются теоремы вложения изотропных пространств дифференцируемых функций: $B^l_{p,\theta}(G) \subset B^s_{q,\theta}(G)$, $B^l_{p,\theta}(G) \subset L_q(G)$, $B^l_{p,\theta}(G) \subset C(G)$.

Здесь рассматриваются пространства дифференцируемых функций $B^l_{p,\theta}(G)$ с изотропными свойствами гладкости ($0 < l < \infty$). Для области G, удовлетворяющей условию конуса, условию гибкого конуса, приводимые вложения таких пространств хорошо известны (см., например, [1]). Они формулируются так же, как и для $G = \mathbb{R}^n$. Для области G с границей, имеющей те или иные особенности, параметры в оценках модулей непрерывности и в теоремах вложения зависят от типов этих особенностей. В [1] приведены изучаемые здесь оценки для модулей непрерывности и теоремы вложения в случае областей с условием гибкого λ-рога. Здесь рассматриваются области существенно более широкого класса. Доказательства основываются на построении нового интегрального представления заданной на области G функции через ее разности и на оценках возникающих интегральных операторов.

Отметим, что для пространств $W^l_p(G)$ Соболева аналог классического вложения $W^l_p(G) \subset L_q(G)$ [2] был получен для области G с условием вырожденного

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00243), программы "Ведущие научные школы" (проект № 96-15-96102), Visiting fellowship grant of EPSRC (GR/M02057).

конуса И. Г. Глобенко [3]. В. Г. Мазья [4] и Д. А. Лабутин [5] установили такое вложение для более широкого класса областей (в [5] это области с условием гибкого вырожденного конуса). В [2], [3], [5] вырождение имеет степенной характер, а в [4] – и более общий.

1. Обозначения. Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e^i$, e^i – орты стандартного базиса, $Q_0 = [-1, 1]^n$. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$ пусть

$$y + tE = \{x : x = y + tz,\ z \in E\},$$

$[x, y]$ – отрезок с концами в точках x, y, $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{x_1}{y_1}, \dots, \dfrac{x_n}{y_n}\right)$, $[a]_1 = \min\{a, 1\}$.

При $m \in \mathbb{N}$ положим $\Delta^m(y)f(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} (-1)^{m-j}\binom{m}{j} f(x+jy)$, $\Delta^0(y)f(x) = f(x)$.

При $m \in \mathbb{N}_0$

$$\Delta^m(y, E)f(x) = \begin{cases} \Delta^m(y)f(x), & \text{если } [x, x+my] \subset E, \\ 0, & \text{если } [x, x+my] \not\subset E. \end{cases}$$

Пусть $t_0 > 0$, вектор-функция $T = (T_1, \dots, T_n)\colon [0, t_0] \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и на $(0, t_0]$ кусочно непрерывно дифференцируема, $T_i(0) = 0$, T_i строго возрастают, при некотором $C_0 > 0$

$$|T_i'(t)| \leqslant C_0 t^{-1} |T(t)| \quad \text{на} \quad (0, t_0] \times G. \tag{1.1}$$

Символом T будем обозначать также диагональную матрицу $n \times n$ с диагональными элементами $T_1, \dots, T_n$. Соответственно символом T^{-1} будем обозначать обратную матрицу.

Символом $R(t, x)$ будем обозначать ортогональную матрицу с $\det R = 1$, заданную на $(0, t_0] \times G$, $R' = \dfrac{\partial R}{\partial t}$. Будем считать, что R непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема по t и что при некотором $C_0 > 0$

$$\|R\| \leqslant C_0, \qquad \|T^{-1}R^{-1}(RT)'\| \leqslant C_0 t^{-1} \quad \text{на} \quad (0, t_0] \times G, \tag{1.2}$$

где $\|A\|$ – максимум среди модулей элементов матрицы A.

Далее будем рассматривать пути

$$\rho = \{\rho(t, x) : 0 \leqslant t \leqslant t_0\}, \qquad x \in G, \quad \rho(0, x) = 0, \quad x + \rho(t, x) \in G, \tag{1.3}$$

где $t \to \rho(t, x)$ непрерывна на $[0, t_0]$, кусочно непрерывно дифференцируема на $(0, t_0]$ и при некотором $C_0 > 0$

$$|T^{-1}R^{-1}\rho'| \leqslant C_0 t^{-1} \quad \text{на} \quad (0, t_0] \times G, \tag{1.4}$$

а также гибкие T-конусы (с вершиной в точке $x \in G$) вида

$$V(x,\rho,R) = x + \bigcup_{0\leqslant t\leqslant t_0} [\rho(t,x) + \delta_0 R(t,x)T(t)Q_0] \subset G. \tag{1.5}$$

При $T_i(t) = t^{\lambda_i}$, $\lambda_i > 0$, $i = 1,\dots,n$, гибкий T-конус будем называть *гибким λ-конусом*. Этот случай является главным в работе.

Примем обозначения: $T_{\min}(t) = \min\limits_i T_i(t)$, $T_{\max}(t) = \max\limits_i T_i(t)$, $\lambda_{\min} = \min\limits_i \lambda_i$, $\lambda_{\max} = \max\limits_i \lambda_i$, $|\lambda| = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i$.

Определение 1. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $t_0, \delta_0 \in (0,1]$. Множество $\mathscr{V}$ гибких T-конусов вида (1.5) будем называть *допустимым*, если $\forall x \in G$ $\exists V(x,\rho,R) \subset \mathscr{V}$ и $\rho(t,x)$, $R(t,x)$ для любого $V \in \mathscr{V}$ обладают описанными свойствами гладкости по t и удовлетворяют условиям (1.1), (1.2), (1.4).

Определение 2. Область $G \subset \mathbb{R}^n$ назовем *областью с условием гибкого T-конуса*, если для нее существует такое допустимое множество $\mathscr{V}$, что при некоторых $j_0 \in \mathbb{N}$, $C_0 > 0$ для любого $t \in (0,t_0]$ существуют ортогональные матрицы $R(t,\mu,j)$, $\det R(t,\mu,j) = 1$, $j = 1,2,\dots,j_0$, $\mu \in \mathbb{Z}^n$, что

$$R(t,x)T(t)Q_0 \subset C_0 \bigcup_j R(t,\mu,j)T(t)Q_0$$

для всех $\mu \in \mathbb{Z}^n$ и $R(t,x)$ из любого $V \in \mathscr{V}$ при $|x - 2\mu T_{\max}(t)| \leqslant T_{\max}(t)$.

Определение 3. Пусть $M \in \mathbb{N}_0$. Область $G \subset \mathbb{R}^n$ назовем *областью с M-условием гибкого T-конуса*, если в некотором допустимом множестве $\mathscr{V}$ для каждых $x^{(0)} \in G$, $v \in \mathbb{R}^n$ с условием $[x^{(0)}, x^{(0)} + Mv] \subset G$ при $t(v) = \max\limits_i T_i^{-1}(|v|)$ найдутся гибкие T-конусы со следующими свойствами:

1°. При $x^{(j)} = x^{(0)} + jv$ $(j = 0,1,\dots,M)$ и при некотором $\widetilde{v} \in \mathbb{R}^n$, $|\widetilde{v}| \leqslant C_0|v|$,

$$x^{(j)} + \rho(t(v),x^{(j)}) = x^{(0)} + \rho(t(v),x^{(0)}) + j\widetilde{v} \qquad (j = 1,2,\dots,M),$$
$$R(t(v),x^{(j)}) = R(t(v),x^{(0)}) \qquad (j = 1,2,\dots,M),$$
$$x^{(0)} + \rho(t(v),x^{(0)}) + [0,M\widetilde{v}] + \delta_0 R(t(v),x^{(0)})T(t(v)) \subset G.$$

2°. Для любого $y \in x^{(0)} + \rho(t(v),x^{(0)}) + [0,M\widetilde{v}]$

$$\rho(t(v),y) = 0, \qquad R(t(v),y) = R(t(v),x^{(0)}).$$

3°. Существуют ортогональные матрицы $R(t,\mu,j)$, $\det R(t,\mu,j) = 1$, $t \in (0,t_0]$, $j = 1,2,\dots,j_0$, $\mu \in \mathbb{Z}^n$, такие, что

$$R(t,x)T(t)Q_0 \subset C_0 \bigcup_j R(t,\mu,j)T(t)Q_0$$

для всех $\mu \in \mathbb{Z}^n$ и всех $V \subset \mathscr{V}$, выделенных в 1°, 2° при $|x - 2\mu T_{\max}(t)| \leqslant T_{\max}(t)$.

Пусть $\|f\|_p = \|f \mid L_p(\mathbb{R}^n)\|$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

На области G с условием гибкого T-конуса определим L_p-модуль непрерывности порядка m функции f

$$\omega^{(m)}(h, G, f)_p = \sup_{|z| \leqslant h} \|\Delta^m(z, G) f\|_p, \qquad h > 0,$$

и рассмотрим изотропные пространства $B^{l(m)}_{p,\theta}(G)$, $0 < l < m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, с нормами

$$\|f \mid B^{l(m)}_{p,\theta}(G)\| = \|f \mid L_p(G)\| + \left(\int_0^{h_0} \left(\frac{\omega^{(m)}(h, G, f)_p}{h^{l_i}}\right)^\theta \frac{dh}{h}\right)^{1/\theta}.$$

В случае $\theta = \infty$ правая часть понимается как

$$\|f \mid L_p(G)\| + \sup_{0<h<h_0} \frac{\omega^{(m)}(h, G, f)_p}{h^{l_i}}.$$

Пространства $H^{l(m)}_p = B^{l(m)}_{p,\infty}$ изучались впервые С. М. Никольским.

2. Интегральные представления функций. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, путь $\rho(t, x)$ вида (1.3) и гибкий T-конус $V(x, \rho, R)$ вида (1.5) взяты из допустимого множества $\mathcal{V}$.

Построим интегральное представление функции f в точке x через разности f по гибкому T-конусу (1.5) (в том смысле, что в нем будут участвовать значения лишь сужения функции f на T-конус (1.5)). Это представление окажется применимым к областям G значительно более общего вида, чем соответствующее представление через разности из [1].

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $b_\nu = (-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$, $0 < m\delta < \delta_0$,

$$\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \operatorname{supp} \eta \subset Q_0, \qquad \int \eta(y)\, dy = 1, \qquad \int |\eta(y)|\, dy = c_0,$$

$\rho = \rho(t, x)$ – путь (1.3), $\Pi T_k = \prod\limits_{k=1}^{n} T_k$,

$$b^{-1} = (-1)^m \sum_{\nu=0}^{m} \frac{b_\nu}{1 + \nu\delta} = (-1)^m \int_0^1 (1 - u^\delta)^m\, du \neq 0,$$

так что

$$\sum_{\nu=0}^{m} \frac{b b_\nu}{1 + \nu\delta} \int \eta(z)\, dz = 1. \tag{2.1}$$

Учитывая, что для всех $x \in U(x^{(0)})$, где $U(x^{(0)})$ – некоторая окрестность $x^{(0)}$, можно взять $\rho(t, x) = \rho(t, x^{(0)})$, будем пока считать, что $\rho = \rho(t)$ не зависит от x_0.

Для $f \in L(G, \mathrm{loc})$ зафиксируем $x \in G$ и рассмотрим специальное усреднение ($N \in \mathbb{N}, 0 < t \leqslant t_0$)

$$S_t^N f(x) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_N=0}^{m} \left(\prod_{k=1}^{N} \frac{bb_{\nu_k}}{1+\nu_k\delta}\right) \int \cdots \int \prod_{k=1}^{N} \eta(z^k)$$

$$\times f\left(x + \rho(t,x) + RT\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\nu_{0,k-1}\delta^{k-1}(1+\nu_k\delta)z^k\right)dz^1\cdots dz^N, \quad (2.2)$$

где $\nu_0 = 1, \nu_k \in \{0, 1, \ldots, m\}, \nu_{k,l} = \nu_k\nu_{k+1}\cdots\nu_l \ (k \leqslant l)$.

Для оценки ядер усреднения введем сферически симметричную функцию

$$\overline{\eta} \in C_0(\mathbb{R}^n), \qquad \overline{\eta} \geqslant 0, \quad \overline{\eta}(x) \geqslant \max|\eta| + \max|\operatorname{grad}\eta| \quad \text{при} \quad x \in Q_0. \qquad (2.3)$$

Будем пользоваться также обозначениями: $f_0(x) = f(x)$ при $x \in G$, $f_0(x) = 0$ при $x \notin G$; $\prod\limits_{k=1}^{N}{}^{(i)} = \prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant N\\ k\neq i}}$, $\prod\limits_{k=1}^{N}{}^{(i,j)} = \prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant N\\ k\neq i,\ k\neq j}}$, $\sum\limits_{\nu_1,\ldots,\nu_n}{}^{(\nu_s)} = \sum\limits_{\nu_1,\ldots,\nu_{s-1},\nu_{s+1},\ldots,\nu_N}$.

Установим некоторые свойства усреднения $S_t^N f$. Заменим в (2.2) z^1 на z по формуле

$$(1+\nu_1\delta)z = (1+\nu_1\delta)z^1 + (-1)^{N-1}\nu_{0,N-1}\delta^{N-1}(1+\nu_N\delta)z^N$$

и, воспользовавшись (2.1), получим

$$S_t^N f(x) - S_t^{N-1}f(x) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_N=0}^{m} \left(\prod_{k=1}^{N} \frac{bb_{\nu_k}}{1+\nu_k\delta}\right)$$

$$\times \int \cdots \int \left[\eta\left(z^1 - (-1)^{N-1}\nu_{0,N-1}\delta^{N-1}\frac{1+\nu_N\delta}{1+\nu_1\delta}\, z^N\right) - \eta(z^1)\right]$$

$$\times \prod_{k=2}^{N} \eta(z^k) f\left(x + \rho + RT\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\nu_{0,k-1}\delta^{k-1}(1+\nu_k\delta)z^k\right)dz^1\cdots dz^N.$$

Оценивая разность η через $|\operatorname{grad}\eta|$ с помощью сдвигов переменных интегрирования, получаем при любом достаточно малом δ и произвольном N

$$|S_t^N f(x) - S_t^{N-1}f(x)| \leqslant Cb^N 2^{mN}\nu_{0,N-1}\delta^{N-1}c_0^{N-1}\int \overline{\eta}(y)|f_0(x+\rho+RTy)|\,dy$$

$$\leqslant C_1 2^{-N}\int \overline{\eta}(y)|f_0(x+\rho+RTy)|\,dy. \qquad (2.4)$$

Отсюда и из равенства

$$S_t^N f = S_t^1 f + \sum_{l=1}^{N-1}(S_t^{l+1}f - S_t^l f)$$

получаем, что

$$|S_t^N f(x)| \leqslant \int K(y)|f_0(x+\rho(t,x)+RTy)|\,dy, \tag{2.5}$$

где $K \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $K \geqslant 0$, K не зависит от f, N.

Покажем, что для произвольного $x^{(0)} \in G$ в некоторой окрестности $U(x^{(0)}) \subset G$

$$S_t^N f \to f \quad \text{при} \quad t \to 0 \quad \text{в} \quad L(U(x^{(0)})). \tag{2.6}$$

Для $x \in U(x^{(0)})$ в силу (2.1) имеем

$$S_t^N f(x) - f(x) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_N=0}^{m} \left(\prod_{k=1}^{N} \frac{bb_{\nu_k}}{1+\nu_k\delta}\right) \int\cdots\int \left(\prod_{k=1}^{N} \eta(z^k)\right)$$
$$\times \left[f\left(x+\rho+RT\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\nu_{0,k-1}\delta^{k-1}(1+\nu_k\delta)z^k\right) - f(x+\rho)\right] dz^1\ldots dz^N,$$

откуда следует оценка

$$|S_t^N f(x) - f(x)| \leqslant \int K_N(y)\big[f_0(x+\rho+RTy) - f(x+\rho)\big]\,dy,$$
$$K_N \in C_0(\mathbb{R}^n), \qquad K_N \geqslant 0,$$

влекущая (2.6).

Будем временно считать, что f непрерывно дифференцируема на G. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} S_t^N f(x) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_N=0}^{m} \left(\prod_{k=1}^{N} \frac{bb_{\nu_k}}{1+\nu_k\delta}\right) \int\cdots\int \left(\prod_{k=1}^{N} \eta(z^k)\right)$$
$$\times \sum_{i=1}^{N} f^{(e^i)}\left(x+\rho(t,x)+RT\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\nu_{0,k-1}\delta^{k-1}(1+\nu_k\delta)z^k\right)$$
$$\times \left[\rho_i'(t,x) + \sum_{s=1}^{N}\big((RT)'z^s\big)_i(-1)^{s-1}\nu_{0,s-1}\delta^{s-1}(1+\nu_s\delta)\right] dz^1\ldots dz^N,$$

где $\rho' = \dfrac{\partial}{\partial t}\rho$, $(RT)' = \dfrac{\partial}{\partial t}(RT)$.

Представим в последней формуле

$$\rho_i' = \sum_{s=1}^{N}(-1)^{s-1}\nu_{0,s-1}\delta^{s-1}(1+\nu_s\delta)\rho_i' + (-1)^N\nu_{0,N}\delta\rho_i'$$

и, считая суммирование по s внешним, сократим в s-м слагаемом на $1+\nu_s\delta$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}S_t^N f(x)=\sum_{s=1}^{N}\mathscr{P}_{t,s}f(x)+\mathscr{R}_{t,N}f(x), \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{t,s}f(x)&=\Bigl(\prod T_k\Bigr)^{-N}\sum_{\nu_1,\dots,\nu_N=0}^{m}{}^{(\nu_s)}\Bigl(\prod_{k=1}^{N}{}^{(s)}\frac{bb_{\nu_k}}{1+\nu_k\delta}\Bigr)\\
&\times b(-1)^{s-1}\nu_{0,s-1}\delta^{s-1}\int\cdots\int\Bigl(\prod_{k=1}^{N}\eta(T^{-1}R^{-1}z^k)\Bigr)\\
&\times\sum_{i=1}^{n}\bigl((RT)'T^{-1}R^{-1}z^s+\rho'\bigr)_i\\
&\times\Delta^m\Bigl((-1)^{s-1}\nu_{0,s-1}\delta^s\bigl[z^s-(1+\nu_{s+1}\delta)z^{s+1}+\nu_{s+1}\delta(1+\nu_{s+2})z^{s+2}\\
&+\dots+(-1)^{N-s}\nu_{s+1,N-1}\delta^{N-s-1}(1+\nu_N\delta)z^N\bigr]\Bigr)\\
&\times f^{(e^i)}\Bigl(x+\rho+\sum_{k=1}^{s}(-1)^{k-1}\nu_{0,k-1}\delta^{k-1}(1+\nu_k\delta)z^k\Bigr)dz^1\dots dz^N,
\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_{t,N}f(x)&=\Bigl(\prod T_k\Bigr)^{-N}\sum_{\nu_1,\dots,\nu_N=0}^{m}\Bigl(\prod_{k=1}^{N}\frac{bb_{\nu_k}}{1+\nu_k\delta}\Bigr)\\
&\times(-1)^N\nu_{0,N}\delta^N\int\cdots\int\Bigl(\prod_{k=1}^{N}\eta(T^{-1}R^{-1}z^k)\Bigr)\\
&\times\sum_{i=1}^{n}\rho' f^{(e^i)}\Bigl(x+\rho+\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\nu_{0,k-1}\delta^{k-1}(1+\nu_k\delta)z^k\Bigr)dz^1\dots dz^N.
\end{aligned}\tag{2.9}$$

Рассмотрим $\mathscr{P}_{t,s}f$ при $2\leqslant s\leqslant N$. В этом случае в (2.8) можно с помощью интегрирования по частям по z_i^1 избавиться от производной $f^{(e^i)}=\dfrac{1}{1+\nu_1\delta}\dfrac{\partial}{\partial z_i^1}f$. Получаем

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{t,s}f(x)=-\Bigl(\prod T_k\Bigr)^{-N}\sum_{\nu_1,\dots,\nu_N=0}^{m}{}^{(\nu_s)}\frac{1}{1+\nu_1\delta}\Bigl(\prod_{k=1}^{N}{}^{(s)}\frac{bb_{\nu_k}}{1+\nu_k\delta}\Bigr)\\
\times b(-1)^{s-1}\nu_{0,s-1}\delta^{s-1}\int\cdots\int\Bigl(\prod_{k=2}^{N}\eta(T^{-1}R^{-1}z^k)\Bigr)
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{j=1}^{n} \eta^{(e^j)}(T^{-1}R^{-1}z^1)\big(T^{-1}R^{-1}(RT)'T^{-1}R^{-1}z^s + T^{-1}R^{-1}\rho'\big)_j$$
$$\times \Delta^m\Big((-1)^{s-1}\nu_{0,s-1}\delta^s\big[z^s - (1+\nu_{s+1}\delta)z^{s+1} + \nu_{s+1}\delta(1+\nu_{s+2})z^{s+2}$$
$$+ \cdots + (-1)^{N-s}\nu_{s+1,N-1}\delta^{N-s-1}(1+\nu_N\delta)z^N\big], G\Big)$$
$$\times f\Big(x + \rho + \sum_{k=1}^{s}(-1)^{k-1}\nu_{0,k-1}\delta^{k-1}(1+\nu_k\delta)z^k\Big)dz^1 \dots dz^N. \qquad (2.10)$$

Здесь вместо разности $\Delta^m(z)f$ записана разность на области $\Delta^m(z,G)f$, что не изменило величины правой части (2.10).

Если $s = N$, то оставляем $\mathscr{P}_{t,s}f = \mathscr{P}_{t,N}f$ в виде (2.10). Если же $2 \leqslant s \leqslant N-1$, то в (2.10) совершаем замену переменной z^s на z, исходя из первого из равенств

$$z^s = z + \big(1 + \nu_{s+1}z^{s+1} - \nu_{s+1}\delta(1+\nu_{s+2}\delta)z^{s+2}$$
$$+ \cdots + (-1)^{N-s-1}\nu_{s+1,N-1}\delta^{N-s-1}(1+\nu_N\delta)z^N\big) = z + y,$$

а затем, исходя из второго из этих равенств, заменим переменную z^{s+1} на y. Получим

$$\mathscr{P}_{t,s}f(x) = -\Big(\prod T_k\Big)^{-N} \sum_{\nu_1,\dots,\nu_N=0}^{m}{}^{(\nu_s)} \frac{1}{1+\nu_1\delta}\Big(\prod_{k=1}^{N}{}^{(s)} \frac{bb_{\nu_k}}{1+\nu_k\delta}\Big)$$
$$\times b(-1)^{s-1}\nu_{0,s-1}\delta^{s-1}\int\cdots\int \prod_{k=1}^{N}{}^{(s,s+1)} \eta(T^{-1}R^{-1}z^k)\,\eta(T^{-1}R^{-1}(z+y))$$
$$\times \frac{1}{1+\nu_{s+1}\delta}\,\eta\Big(\frac{T^{-1}R^{-1}}{1+\nu_{s+1}\delta}\big(y + \nu_{s+1}\delta(1+\nu_{s+2}\delta)z^{s+2}$$
$$+ \cdots + (-1)^{N-s-1}\nu_{s+1,N-1}\delta^{N-s-1}(1+\nu_N\delta)z^N\big)\Big)$$
$$\times \sum_{j=1}^{n} \eta^{(e^j)}(T^{-1}R^{-1}z^1)\big(T^{-1}R^{-1}(RT)'T^{-1}R^{-1}(z+y) + T^{-1}R^{-1}\rho'\big)_j$$
$$\times \Delta^m\big((-1)^{s-1}\nu_{0,s-1}\delta^s z, G\big)$$
$$\times f\Big(x + \rho + \sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{k-1}\nu_{0,k-1}\delta^{k-1}(1+\nu_k\delta)z^k$$
$$+ (-1)^s\nu_{0,s-1}\delta^{s-1}(1+\nu_s\delta)(z+y)\Big)dz^1 \dots dz^{s-1}\,dz\,dy\,dz^{s+1}\dots dz^N. \qquad (2.11)$$

В случае $s = 1$ избавляемся от дифференцирования f в (2.8) тем же способом, интегрируя по частям не по z_i^1, а по y_i.

Символом $\mathscr{P}_{t,s,N}f(x)$ будем обозначать правую часть (2.8). Тогда

$$\mathscr{P}_{t,s}f = \mathscr{P}_{t,s,N}f = \mathscr{P}_{t,s,s+2}f + \sum_{l=s+3}^{N}(\mathscr{P}_{t,s,l}f - \mathscr{P}_{t,s,l-1}f).$$

В силу (2.1) $\mathscr{P}_{t,s,l}f - \mathscr{P}_{t,s,l-1}$ можно записать в виде интеграла от разности; при этом, считая интегрирование по $(z^{s+2},\dots,z^l)$ внутренним, сталкиваемся с необходимостью оценить

$$\begin{aligned}
I_{t,s+2,l}(y) = \Big(\prod T_k\Big)^{l-s-1} &\sum_{\nu_{s+2},\dots,\nu_l=0}^{m}\bigg(\prod_{k=s+2}^{l}\frac{bb_{\nu_k}}{1+\nu_k\delta}\bigg)\\
&\times\int\cdots\int\prod_{k=s+2}^{l}\eta(T^{-1}R^{-1}z^k)\\
&\times\Delta\big((-1)^{l-s-1}\nu_{s+1,l-1}\delta^{l-s-1}(1+\nu_l\delta)z^l, G\big)\\
&\times\eta\bigg(\frac{T^{-1}R^{-1}}{1+\nu_{s+1}\delta}(y+\nu_{s+1}\delta(1+\nu_{s+2}\delta)z^{s+2}\\
&\quad+\dots+(-1)^{l-s-2}\nu_{s+1,l-2}\delta^{l-s-2}(1+\nu_{l-1}\delta)z^{l-1})\bigg)dz^{s+2}\dots dz^l.
\end{aligned}$$

Отсюда при всех достаточно малых $\delta>0$

$$\begin{aligned}
|I_{t,s+2,l}(y)| &\leqslant C\bigg(\int\overline{\eta}(z)\,dz\bigg)^{l-s-1}b^{l-s-1}2^{m(l-s-1)}m^{l-s-1}\delta^{l-s+1}\overline{\eta}(T^{-1}R^{-1}y)\\
&\leqslant C_1 2^{-l+s+1}\overline{\eta}(T^{-1}R^{-1}y).
\end{aligned}$$

Поэтому и с учетом (1.2), (1.4)

$$\begin{aligned}
|\mathscr{P}_{t,s}f(x)| &\leqslant \frac{C_2}{t}\Big(\prod T_k\Big)^{-s}\sum_{\nu_1,\dots,\nu_{s-1}=0}^{m}\bigg(\prod_{k=1}^{s-1}\frac{bb_{\nu_k}}{1+\nu_k\delta}\bigg)\\
&\quad\times\nu_{0,s-1}\delta^{s-1}\int\cdots\int\prod_{k=2}^{s-1}|\eta(T^{-1}R^{-1}z^k)|\overline{\eta}(T^{-1}R^{-1}z)\overline{\eta}(T^{-1}R^{-1}z^1)\\
&\quad\times\big|\Delta^m(\nu_{0,s-1}\delta^s z, G)\,f(x+\rho+z^1)\big|\,dz^1\dots dz^{s-1}\,dz\\
&\leqslant\frac{C_3}{t}\iint\overline{\eta}(T^{-1}R^{-1}y)\overline{\eta}(T^{-1}R^{-1}z)\\
&\quad\times\big|\Delta^m(\nu_{0,s-1}\delta^s z, G)\,f(x+\rho+y)\big|\,\frac{dy}{\prod T_k}\,\frac{dz}{\prod T_k}\,. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Оценим теперь $\mathscr{R}_{t,N}f(x)$ из (2.9). Избавившись от дифференцирования f с помощью интегрирования по частям по z_i^1, получаем

$$|\mathscr{R}_{t,N}f(x)| \leqslant \frac{C}{t}\, 2^{-N} \int \overline{\eta}(T^{-1}R^{-1}y)\, |f_0(x+\rho(t,x)+y)| \frac{dy}{\prod T_k}\,. \tag{2.13}$$

Построение интегрального представления основано (как и в [1]) на формуле Лейбница–Ньютона:

$$S_\varepsilon^N f(x) = S_{t_0}^N f(x) - \int_\varepsilon^{t_0} \frac{\partial}{\partial t} S_t^N f(x)\, dt, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant t_0, \tag{2.14}$$

в котором $\dfrac{\partial}{\partial t} S_t^N f$ заменено на правую часть (2.7), причем $\mathscr{P}_{t,s}f$, $\mathscr{R}_{t,N}$ преобразованы к форме, не содержащей производных от f (см., например, (2.10)). Это равенство, написанное для точки $x = x^{(0)}$, будет выполняться, очевидно, и в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ с тем же самым путем ρ и, следовательно, с тем же самым ядром усреднения, что и в самой точке $x^{(0)}$. Дифференцируя такое равенство и обозначив символом ∂^α производную D_x^α от усреднения $S_t^N f$ или от $\dfrac{\partial}{\partial t} S_t^N f$ с замороженными параметрами ядра усреднения, получим

$$\partial^\alpha S_\varepsilon^N f(x) = \partial^\alpha S_{t_0}^N f(x) - \int_\varepsilon^{t_0} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} S_t^N f(x)\, dt, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant t_0. \tag{2.15}$$

При этом производную ∂^α будем считать примененной к ядру усреднения (но не к $f_0(x)$, $\Delta^m(z,G)f(x)$), что можно осуществить с помощью предварительного сдвига переменной интегрирования (обычная возможность реализации дифференцирования свертки).

Равенство (2.15), установленное для непрерывно дифференцируемой функции f, переносится с помощью предельного перехода на произвольную функцию $f \in L(G,\mathrm{loc})$.

Если же $D^\alpha f \in L(G,\mathrm{loc})$, то предельным переходом при $t \to 0$ получаем из него представление

$$D^\alpha f(x) = \partial^\alpha S_\tau^N f(x) - \int_0^{\tau} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} S_t^N f(x)\, dt, \qquad 0 < \tau \leqslant t_0. \tag{2.16}$$

При этом интеграл понимается как сходящийся на нижнем пределе в смысле $L(G, \mathrm{loc})$, а само равенство с точностью до множества меры нуль.

Нам понадобятся оценки $\partial^\alpha \dfrac{\partial}{\partial t} S_t^N f(x)$ из (2.15), (2.16).

В случае $\alpha = 0$ они уже получены (см. (2.7), (2.12), (2.13)). Повторяя их вывод и в нужный момент реализуя дифференцирование ∂^α свертки с помощью дифференцирования ядра, получаем:

$$\partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} S_t^N f(x) = \sum_{s=1}^{N} \partial^\alpha \mathscr{P}_{t,s} f(x) + \partial^\alpha \mathscr{R}_{t,N} f(x), \tag{2.17}$$

$$|\partial^\alpha \mathscr{P}_{t,s}(x)| \leqslant C_\alpha t^{-1} T_{\min}(t)^{-|\alpha|} \iint \overline{\eta}(T^{-1}R^{-1}y)\,\overline{\eta}(T^{-1}R^{-1}z) \times \left|\Delta^m(\nu_{0,s-1}\delta^s z, G)\, f(x+\rho+y)\right| \frac{dy}{\prod T_k}\,\frac{dz}{\prod T_k}, \tag{2.18}$$

$$|\partial^\alpha \mathscr{R}_{t,N}(x)| \leqslant C_\alpha 2^{-N} t^{-1} T_{\min}(t)^{-|\alpha|} \times \int \overline{\eta}(T^{-1}R^{-1}y)\left|f_0(x+\rho(t,x)+y)\right| \frac{dy}{\prod T_k}. \tag{2.19}$$

Аналогично обобщаются и оценки (2.5):

$$|\partial^\alpha S_t^N f(x)| \leqslant C_\alpha T_{\min}(t)^{-|\alpha|} \int K(y)\left|f_0(x+\rho(t,x)+RTy)\right| dy. \tag{2.20}$$

3. Оценки разности функции. Оценим разность $\Delta^M(v) D^\alpha f$ с помощью представления (2.16). Пусть $v \in \mathbb{R}^n$, $[x, x+M\delta] \subset G$, $t(v) = \max\limits_i T^{-1}(|v|) \leqslant t_0$, так что $\min\limits_i T_i(t(v)) \geqslant |v|$. Учитывая свойства 1°, 2° из определения 3, имеем

$$\begin{aligned} |\Delta^M(v) D^\alpha f(x)| &\leqslant \sum_{\varkappa=0}^{M} \binom{M}{\varkappa} \int_0^{t(v)} \left|\partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} S_t^N f(x+\varkappa v)\right| dt + \left|\Delta^M(v)\partial^\alpha S_{t(v)}^N f(x)\right| \\ &= \sum_{\varkappa=0}^{M} \binom{M}{\varkappa} I_\varkappa(x+\varkappa v, v) + J(x,v), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $I_\varkappa$ – результат подстановки (2.17), (2.18), (2.19) в интеграл по $(0, t(v)]$.

Оценим последнее слагаемое J в (3.1). В силу определения 3

$$J(x) = \left|\Delta^M(v+\widetilde{v})\partial^\alpha S_{t(v)}^N f\big(x+\rho(t(v),x)\big)\right|,$$

где $S_t^N f(y)$ – усреднение, определяемое с помощью $\rho(t,y)$ и R из п. 2° определения 3. Поскольку на отрезке $x + \rho(t(v), x) + [0, M(v+\widetilde{v})]$ при фиксированном

$t = t(v)$ параметр R ядра усреднения не меняется, $J(x,v)$ легко оценивается через интеграл от производной порядка M по направлению[1) $\dfrac{v+\widetilde{v}}{|v+\widetilde{v}|}$:

$$|J(x,v)| \leqslant |v+\widetilde{v}|^M \int_0^M h^{M-1} \left| \partial^M_{\frac{v+\widetilde{v}}{|v+\widetilde{v}|}} \partial^\alpha \widetilde{S}^N_{t(v)} f\big(x+\rho(t(v),x)+h(v+\widetilde{v})\big)\right| dh.$$

Производная по направлению e

$$\partial_e^M = \sum_{|\beta|=M} c_\beta \partial^\beta,$$

поэтому для дальнейшей оценки J можно воспользоваться равенством (2.15) с заменой в нем ε на $t(v)$ и α на $\beta+\alpha$ и равенством (2.17). В силу (2.17), (2.20) получаем теперь, что

$$\begin{aligned} |J(x,v)| \leqslant C_\alpha \int_0^M \int_{t(v)}^{t_0} & T_{\min}(t)^{-|\alpha|-M} |v|^m \iint \overline{\eta}(T^{-1}R^{-1}y)\overline{\eta}(T^{-1}R^{-1}z) \\ & \times \left|\Delta^m(\nu_{0,s-1}\delta^s z, G)\, f(x+\rho+y+h(v+\widetilde{v}))\right| \frac{dy}{\prod T_k}\, \frac{dz}{\prod T_k}\, \frac{dt}{t}\, dh \\ & + C_\alpha J_0(x,v), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned} J_0(x,v) = {} & T_{\min}(t_0)^{-|\alpha|-M} |v|^M \\ & \times \int_0^M \int K(y) \left| f_0\big(x+\rho(t_0,x)+RT(t_0)y+h(v+\widetilde{v})\big)\right| dy\, dh. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Оценим L_q-норму $|\Delta^M(v)D^\alpha f|$, используя (3.1), (3.2), (3.3), неравенство Минковского для интегралов, неравенство Йенсена

$$\Big(\sum_k a_k^q\Big)^{1/q} \leqslant \Big(\sum_k a_k^p\Big)^{1/p} \quad \text{при} \quad a_k \geqslant 0$$

и неравенство Юнга для свертки

$$\|K * f\|_q \leqslant \|K\|_r \|f\|_p, \qquad \frac{1}{r} = 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\,.$$

[1) Будем считать, что $v+\widetilde{v} \neq 0$. Рассмотрение более простого случая $v+\widetilde{v}=0$ опустим.

Получаем

$$\|J_0(\,\cdot\,,v)\|_q \leqslant CT_{\min}(t_0)^{-|\alpha|}\Big(\prod T_k\Big)^{-1/p+1/q}\|f \mid L_p(G)\|,$$

$$\|J(\,\cdot\,,v)\|_q \leqslant C|v|^M \int_{t(v)}^{t_0} T_{\min}^{-|\alpha|-M}\Big(\prod T_k\Big)^{-1/p+1/q-1}$$
$$\times\Big\{\sum_{\mu\in\mathbf{Z}^n}\sum_{1\leqslant j\leqslant j_0}\Big[\int K(T^{-1}R^{-1}(t,\mu,j)z)$$
$$\times\big\|\Delta^m(\delta z,G)f \mid L_p(n_0T_{\max}Q_0+2\mu T_{\max})\big\|\Big]^p\Big\}^{1/p} dz\,\frac{dt}{t}$$
$$+\,C\|J_0(\,\cdot\,,v)\|_q,\quad T_i=T_i(t).$$

$$\|I_\varkappa(\,\cdot\,,v)\|_q \leqslant C\int_0^{t(v)} T_{\min}^{-|\alpha|}\Big(\prod T_k\Big)^{-1/p+1/q-1}$$
$$\times\Big\{\sum_{\mu\in\mathbf{Z}^n}\sum_{1\leqslant j\leqslant j_0}\Big[\int K(T^{-1}R^{-1}(t,\mu,j)z)$$
$$\times\big\|\Delta^m(\delta z,G)f \mid L_p(n_0T_{\max}Q_0+2\mu T_{\max})\big\|\Big]^p\Big\}^{1/p} dz\,\frac{dt}{t},\quad T_i=T_i(t),$$

При получении последней оценки мы оцениваем сначала $\|I_{\varkappa,\varepsilon}(\,\cdot\,,v)\|_q$, где $I_{\varkappa,\varepsilon}$ отличается от $I_\varkappa = I_{\varkappa,0}$ лишь заменой нижнего предела 0 внешнего интеграла на $\varepsilon\in(0,t(v))$. Затем переходим к пределу при $N\to\infty$ и, наконец, к пределу при $\varepsilon\to 0$.

Из последних трех оценок получаем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть $M\in\mathbb{N}_0$, $G\subset\mathbb{R}^n$ является областью с M-условием гибкого T-конуса. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\sup_{|v|\leqslant h}\|\Delta^M(v,G)D^\alpha f\|_q$$
$$\leqslant Ch^M\|f \mid L_p(G)\| + C\int_0^{t_0}\Big[\frac{h}{T_{\min}}\Big]_1^M T_{\min}^{-|\alpha|}\Big(\prod T_k\Big)^{-1/p+1/q-1}$$
$$\times\Big\{\sum_{\mu\in\mathbf{Z}^n}\sum_{1\leqslant j\leqslant j_0}\Big[\int K(T^{-1}R^{-1}(t,\mu,j)z)$$
$$\times\big\|\Delta^m(\delta z,G)f \mid L_p(n_0T_{\max}Q_0+2\mu T_{\max})\big\|dz\Big]^p\Big\}^{1/p}\frac{dt}{t},\qquad (3.4)$$

где $T_i=T_i(t)$, $0<h\leqslant 1$, постоянные C, n_0 не зависят от f.

Если же область G удовлетворяет дополнительно условию независимости $R(t,\mu,j)$ от μ (т.е. $R(t,\mu,j)=R(t,j)$) в условии 3° определения 3, то

$$\begin{aligned}\sup_{|v|\leqslant h}&\|\Delta^M(v,G)D^\alpha f\|_q\\&\leqslant Ch^M\|f\mid L_p(G)\|+C\sum_{j=1}^{j_0}\int_0^{t_0}\left[\frac{h}{T_{\min}}\right]_1^M T_{\min}^{-|\alpha|}\Big(\prod T_k\Big)^{-1/p+1/q-1}\\&\times\int K\big(T^{-1}R^{-1}(t,j)z\big)\,\|\Delta^m(\delta z,G)f\|_p\,dz\,\frac{dt}{t},\\&\qquad T_i=T_i(t),\qquad 0<h\leqslant 1.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Следствие. *В условиях теоремы* 1

$$\begin{aligned}\omega^{(M)}(h,G,D^\alpha f)_q\leqslant C\,h^M\|f\mid L_p(G)\|+C\int_0^{t_0}\left[\frac{h}{T_{\min}}\right]_1^M T_{\min}^{-|\alpha|}\Big(\prod T_k\Big)^{-1/p+1/q}\\\times\left\{\sum_{\mu\in\mathbf{Z}^n}\sum_{j=1}^{j_0}\omega^{(m)}(T_{\max},n_0T_{\max}Q_0+2\mu T_{\max},f)_p^p\right\}^{1/p}\frac{dt}{t},\end{aligned}\tag{3.6}$$

где $T_i=T_i(t)$, $0<h\leqslant 1$, *постоянные* C, n_0 *не зависят от* f.

Если же область G удовлетворяет дополнительно условию независимости $R(t,\mu,j)$ от μ (т.е. $R(t,\mu,j)=R(t,j)$), то

$$\begin{aligned}\omega^{(M)}(h,G,D^\alpha f)_q\leqslant C\,h^M\|f\mid L_p(G)\|+C\int_0^{t_0}\left[\frac{h}{T_{\min}}\right]_1^M T_{\min}^{-|\alpha|}\Big(\prod T_k\Big)^{-1/p+1/q}\\\times\,\omega^{(m)}(T_{\max},G,f)_p\frac{dt}{t},\qquad T_i=T_i(t),\quad 0<h\leqslant 1.\end{aligned}\tag{3.7}$$

4. Вложения пространств $B^{l(m)}_{p,\theta}(G)$. Теоремы вложения $B^l_{p,\sigma}(G)$ в $B^s_{q,\theta}(G)$, в $L_q(G)$, в $C(G)$ можно получить как результат ограниченности оператора, определяемого правой частью (3.6) или (3.7) на весовом $L_\sigma((0,h_0])$-пространстве с весом $h^{-l\sigma-1}$ со значениями в весовом $L_\theta((0,h_0])$-пространстве и т. п. Ниже мы получаем таким способом некоторые простые достаточные условия вложений.

Некоторые связи между пространствами $B^{l(m)}_{p,\theta}(G)$ содержит следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть G является областью с условием гибкого T-конуса, $0<l<l+\varepsilon<m\in\mathbf{N}$, $1\leqslant\sigma<\theta\leqslant\infty$. Тогда*

$$B^{l+\varepsilon(m)}_{p,\infty}(G)\subset B^{l(m)}_{p,\sigma}(G)\subset B^{l(m)}_{p,\theta}(G).\tag{4.1}$$

Доказательство основано на оценке

$$\|\Delta^m(z,G)f\|_p \leqslant C \int_\delta^{1/3} \|\Delta^m(tz,G)f\|_p \, dt, \qquad 0<\delta<\frac{1}{3},$$

(см. [1; п. 16.1]) и применении неравенства Йенсена, как это сделано в [1; п. 18.8].

Теорема 2. *Пусть* $M \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ *является областью с* M*-условием гибкого* T*-конуса*, $0<l<m$, $0<s<M$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$,

$$\left\{\int_0^{h_0} h^{-s\theta}\left[\int_0^{t_0}\left[\frac{h}{T_{\min}(t)}\right]_1^M T_{\min}(t)^{-|\alpha|} \right.\right. \\ \left.\left. \times \left(\prod T_k\right)^{-1/p+1/q} T_{\max}(t)^l \frac{dt}{t}\right]^\theta \frac{dh}{h}\right\}^{1/\theta} < \infty. \tag{4.2}$$

Тогда

$$D^\alpha B^{l(m)}_{p,\infty}(G) \subset B^{s(M)}_{q,\theta}(G). \tag{4.3}$$

Доказательство. Рассмотрим лишь случай $\theta<\infty$ (при $\theta=\infty$ рассуждения упрощаются). Опустив доказательство более простой и содержащейся в следующей теореме оценки $\|D^\alpha f \mid L_q(G)\|$, займемся лишь оценкой

$$\left\{\int_0^{h_0} \sup_{|v|<h} \|\Delta^M(v,G)D^\alpha f\|_q^\theta h^{-s\theta}\frac{dh}{h}\right\}^{1/\theta}.$$

Ради простоты записи будем считать, что в условии 3° определения 3 $R(t,\mu,j) = R(t,j)$ не зависят от μ. Из (3.5) следует, что достаточно оценить

$$\left\{\int_0^{h_0} h^{-s\theta}\left[\int_0^{t_0}\left[\frac{h}{T_{\min}(t)}\right]_1^M T_{\min}(t)^{-|\alpha|}\left(\prod T_k(t)\right)^{-1/p+1/q-1}\right.\right. \\ \left.\left. \times \int K(T^{-1}R^{-1}(t,j)z)|z|^l \frac{\|\Delta^m(\delta z,G)f\|_p}{|z|^l}\, dz\, \frac{dt}{t}\right]^\theta \frac{dh}{h}\right\}^{1/\theta}.$$

Оценив $\|\Delta^m(\delta z,G)f\|_p |z|^{-l}$ нормой $\|f \mid B^{l(m)}_{p,\infty}(G)\|$, в силу (4.2) получаем (4.3).

Замечание. Условие (4.2) при $\theta=1$ имеет вид

$$\int_0^{t_0} (T_{\max}(t))^l \left(\prod T_k(t)\right)^{-1/p+1/q} (T_{\min}(t))^{-s-|\alpha|}\frac{dt}{t} < \infty,$$

а при $\theta=\infty$

$$\sup_{0<h\leqslant h_0} h^{-s} \int_0^{t_0}\left[\frac{h}{T_{\min}(t)}\right]_1^M (T_{\min}(t))^{-|\alpha|}\left(\prod T_k(t)\right)^{-1/p+1/q}(T_{\max}(t))^l\frac{dt}{t}.$$

Теорема 3. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ является областью с условием гибкого T-конуса*, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $0 < l < m$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$,

$$\int_0^{t_0} (T_{\max}(t))^l \Big(\prod T_k(t)\Big)^{-1/p+1/q} (T_{\min}(t))^{-|\alpha|} \frac{dt}{t} < \infty. \tag{4.4}$$

Тогда $D^\alpha B^{l(m)}_{p,\infty}(G) \subset L_q(G)$.

Доказательство. Будем считать ради простоты записи, что в определении 2 $R(t,\mu,j) = R(t,j)$ не зависят от μ. Воспользуемся оценкой (3.5) при $M = 0$ (область G удовлетворяет определению 3 при $M = 0$):

$$\|D^\alpha f \mid L_q(G)\| \leqslant C\|f \mid L_p(G)\| + C \int_0^{t_0} (T_{\min}(t))^{-|\alpha|} \Big(\prod T_k(t)\Big)^{-1/p+1/q-1}$$
$$\times \sum_{j=1}^{j_0} \int K\big(T^{-1}R^{-1}(t,j)\big)|z|^l \frac{\|\Delta^m(\delta z, G)f\|_p}{|z|^l}\, dz\, \frac{dt}{t},$$

Оценив $\|\Delta^m(\delta z,G)f\|_p |z|^{-l}$ нормой $\|f \mid B^{l(m)}_{p,\infty}(G)\|$, в силу (4.4) получаем утверждение теоремы.

Теорема 4. *В условиях теоремы 3 при $q = \infty$ справедливо вложение* $D^\alpha B^{l(m)}_{p,\infty}(G) \subset C(G)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу теоремы вложения из [1; п. 18.11] производная D^α каждой функции $f \in B^{l(m)}_{p,\infty}(G)$ эквивалентна непрерывной, и воспользоваться теоремой 3 при $q = \infty$.

Теорема 5. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ является областью с M-условием гибкого λ-конуса*, $0 < l < m \in \mathbb{N}$. *Тогда*:

1°. *при* $0 < s < M$, $l\lambda_{\min} \geqslant (s + |\alpha|)\lambda_{\max} + (1/p - 1/q)|\lambda|$

$$D^\alpha B^{l(m)}_{p,\theta}(G) \subset B^{s(M)}_{q,\theta}(G);$$

2°. *при* $M = 0$, $l\lambda_{\min} \geqslant |\alpha|\lambda_{\max} + (1/p - 1/q)|\lambda|$

$$D^\alpha B^{l(m)}_{p,1}(G) \subset L_q(G);$$

3°. *при* $M = 0$, $l\lambda_{\min} \geqslant |\alpha|\lambda_{\max} + |\lambda|/p$

$$D^\alpha B^{l(m)}_{p,1}(G) \subset C(G).$$

Доказательство. 1°. Считая ради простоты записи, что область G удовлетворяет еще и условию независимости $R(t,\mu,j)$ от μ (т.е. $R(t,\mu,j) = R(t,j)$) в условии 3° определения 3, из (3.7) при $1 \leqslant \theta < \infty$ имеем

$$h^{-s}\omega^M(h,G,D^\alpha f)_q \leqslant Ch^{M-s}\|f \mid L_p(G)\| \\ + C\left\{\int_0^{h_0}\left[\int_0^{t_0}\left[\frac{h}{t^{\lambda_{\max}}}\right]_1^M\left(\frac{h}{t^{\lambda_{\max}}}\right)^{-s}\varphi(t)\,\frac{dt}{t}\right]^\theta\frac{dh}{h}\right\}^{1/\theta},$$

где $\varphi(t) = t^{-l\lambda_{\min}}\omega^{(m)}(t^{\lambda_{\min}},G,f)_p$.

Остается воспользоваться неравенством Харди (см., например, [1]).

При $\theta = 1$ оценки лишь упрощаются. Этот случай содержится также в теореме 2.

2°. Утверждение следует непосредственно из (3.7).

3°. Достаточно заметить, что в силу теоремы вложения из [1; п. 18.11] производная $D^\alpha f$ каждой функции $f \in B^{l(m)}_{p,1}(G)$ непрерывна, и воспользоваться утверждением 2°.

Список литературы

[1] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.

[2] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

[3] Глобенко И. Г. Некоторые вопросы теории вложения для областей с особенностями на границе // Матем. сб. 1962. Т. 57. №2. С. 201–224.

[4] Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

[5] Лабутин Д. А. Интегральное представление функций и вложение пространств Соболева на областях с нулевыми углами // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №2. С. 201–219.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `besov@mi.ras.ru`

Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. С. 37–56

Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье непрерывных функций с некоторым модулем непрерывности

И. Л. Блошанский, Т. А. Мацеевич

Пусть E – произвольное измеримое множество, $E \subset T^N = [-\pi, \pi)^N$, $N \geqslant 1$, $\mu E > 0$ (μ – мера). В работе исследуется слабая обобщенная локализация почти всюду (п.в.), т.е. вопрос о сходимости п.в. на каких-либо подмножествах $E_1 \subset E$, $\mu E_1 > 0$, кратных тригонометрических рядов Фурье функций, равных нулю на E. Получены достаточные условия (в терминах структуры и геометрии множеств E_1 и E) сходимости п.в. на E_1 кратных рядов Фурье (суммируемых по прямоугольникам) функций из $H^\omega(T^N)$, $\omega(\delta) = o\Big(\Big[\log \frac{1}{\delta} \log\log\log \frac{1}{\delta}\Big]^{-1}\Big)$, $\delta \to 0$. Найденные достаточные условия (связанные с определенными трехмерными ортогональными проекциями множеств E_1 и E, и названные свойством $\mathbb{B}_3$ множества E) обобщают полученные ранее (одним из авторов статьи) свойства $\mathbb{B}_k$, $k = 1, 2$, множества E (связанные соответственно с одномерными и двумерными проекциями множеств E и E_1) – достаточные условия сходимости п.в. рядов Фурье функций из классов $L_1(T^N)$ и $L_p(T^N)$, $p > 1$, соответственно.

Библиография: 14 названий.

Введение

1. Рассмотрим N-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать $x = (x_1, \dots, x_N)$, и положим $kx = k_1x_1 + \dots + k_Nx_N$, $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_N^2$.

Введем множество $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами и для любого $m \in \mathbb{Z}^1$ введем множество $\mathbb{Z}^N_m = \{n \in \mathbb{Z}^N : n_j \geqslant m,\ j = 1, \dots, N\}$.

Пусть 2π-периодическая (по каждому аргументу) функция $f(x) \in L_p(T^N)$, $p \geqslant 1$, где $T^N = \{x \in \mathbb{R}^N : -\pi \leqslant x_j < \pi,\ j = 1, \dots, N\}$, разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k e^{i(kx)}. \tag{0.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-15-96073).

Работа первого автора выполнена также при поддержке программы "Ведущие научные школы" (проект № 96-01-00332).

Для любого вектора $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$ рассмотрим прямоугольную частичную сумму

$$S_n(x; f) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \sum_{k_N=-n_N}^{n_N} c_k e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_N x_N)}. \qquad (0.2)$$

При этом под сходимостью ряда (0.1) по прямоугольникам будем понимать существование предела частичных сумм $S_n(x; f)$ при $n \to \infty$ $\Big($т.е. $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} n_j \to \infty\Big)$.

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset T^N$, – произвольное измеримое множество, $\mu\mathfrak{A} > 0$ ($\mu = \mu_N$ – N-мерная мера Лебега), и пусть $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$.

Основной целью нашего исследования является изучение поведения на $\mathfrak{A}$ частичной суммы (0.2) при $n \to \infty$ в зависимости от структуры и геометрии множества $\mathfrak{A}$, а также условий, накладываемых на функцию $f(x)$.

2. Для одномерных рядов Фурье функций $f \in L_1$ классический принцип локализации Римана утверждает, что ряд Фурье функции $f \in L_1(T^1)$, $f(x) = 0$ на интервале $I \subset T^1$, сходится к нулю равномерно на каждом сегменте, целиком содержащемся в I.

Для кратных рядов Фурье ($N \geqslant 2$) классический принцип локализации Римана перестает быть верным не только для непрерывных функций [1], но и в любом классе

$$H^\omega(T^N) = \Big\{ f \in \mathbb{C}(T^N) : \omega(\delta, f) = \sup_{\substack{|x-y|<\delta \\ x,y \in T^N}} |f(x) - f(y)| = O\big(\omega(\delta)\big) \Big\},$$

где модуль непрерывности $\omega(\delta) = \lambda(\delta)\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{1-N}$, а $\lambda(\delta)$ – произвольная монотонно стремящаяся к $+\infty$ при $\delta \to +0$ функция (см. [2; с. 31]).

Замена равномерной сходимости ряда Фурье на множестве, где разлагаемая в ряд Фурье функция равна нулю, сходимостью почти всюду (п.в.) позволяет (см. [3], [4]) доказать (при $N = 2$ в классах L_p, $p > 1$) справедливость обобщенного принципа локализации п.в., заключающегося в том, что двойной ряд Фурье (суммируемый по прямоугольникам) функций $f \in L_p(T^2)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на открытом множестве $\mathfrak{A} \subset T^2$, сходится п.в. к нулю на $\mathfrak{A}$.

Этот принцип перестает быть верным при $N \geqslant 3$ в классе $\mathbb{C}(T^N)$ не только на открытых множествах $\mathfrak{A} \subset T^N$ [4], но даже на любых множествах $\mathfrak{A}$, не плотных в T^N [5]. Однако в [6] было установлено, что обобщенный принцип локализации п.в. остается справедливым при $N = 3$ в классах $H^\omega(T^3)$, $\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$ при $\delta \to +0$, где

$$\omega_0(\delta) = \left(\log \frac{1}{\delta} \log\log\log \frac{1}{\delta}\right)^{-1}. \qquad (0.3)$$

Заметим, что класс функций $H^\omega(T^2)$, $\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$, $\delta \to +0$, впервые появился в работе К. И. Осколкова [7], где была доказана сходимость п.в. двойных рядов Фурье функций $f(x)$ из такого класса. (Ряд оценок работы [7] будет использоваться нами при доказательстве леммы в § 1 настоящей работы.)

3. В работах [8], [9] одним из авторов было введено понятие "слабая обобщенная локализация почти всюду".

Определение 1. Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное множество положительной меры. Будем говорить, что для кратных рядов Фурье функций из L_p, $p \geqslant 1$, справедлива на множестве $\mathfrak{A}$ *слабая обобщенная локализация почти всюду* (СОЛ), если для любой функции $f(x) \in L_p(T^N)$, $p \geqslant 1$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, существует подмножество положительной меры $\mathfrak{A}_1$ множества $\mathfrak{A}$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x;f) = 0 \text{ почти всюду на } \mathfrak{A}_1.$$

Введем следующие обозначения. Пусть M – множество чисел $\{1,2,\ldots,N\}$, и пусть $k \in \mathbb{Z}_1^1$, $1 \leqslant k \leqslant N$. Обозначим через $J = J_k = \{j_1,\ldots,j_k\}$, $j_s < j_l$ при $s < l$, и (в случае $k < N$) $M \setminus J = M \setminus J_k = \{m_1,\ldots,m_{N-k}\}$, $m_s < m_l$ при $s < l$ – непустые подмножества множества M. Разложим пространство $\mathbb{R}^N$ на сумму двух подпространств $\mathbb{R}_J^k$ и $\mathbb{R}_{M\setminus J}^{N-k}$, где

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_J^k &= \{x = (x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j = 0 \text{ при } j \in M \setminus J\},\\ \mathbb{R}_{M\setminus J}^{N-k} &= \{x = (x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j = 0 \text{ при } j \in J\}.\end{aligned}$$

Обозначим также

$$\begin{aligned}T_J^k &= \{x \in \mathbb{R}_J^k : -\pi \leqslant x_j < \pi \text{ при } j = j_1,\ldots,j_k\},\\ T_{M\setminus J}^{N-k} &= \{x \in \mathbb{R}_{M\setminus J}^{N-k} : -\pi \leqslant x_j < \pi \text{ при } j = m_1,\ldots,m_{N-k}\}.\end{aligned}$$

Очевидно, $\mathbb{R}_M^N = \mathbb{R}^N$, а $T_M^N = T^N$.

Пусть Ω_J, $J = J_k \subset M$, – произвольные (непустые) открытые подмножества T_J^k. Положим

$$W_J = \Omega_J \times T_{M\setminus J}^{N-k}, \tag{0.4}$$

$$W_k^0 = \bigcap_{J_k\subset M} W_J. \tag{0.5}$$

Предполагая (при $k \geqslant 2$), что $W_k^0 \neq \varnothing$, рассмотрим

$$W_k = W(W_k^0) = \bigcup_{J_k\subset M} W_J. \tag{0.6}$$

В работах [8] и [10] И. Л. Блошанским были введены и изучены свойства $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ множества $\mathfrak{A} \subset T^N$, указывающие на определенную структуру и геометрию этого множества (связанные, соответственно, с одномерной или двумерной проекцией определенного подмножества $\mathfrak{A}$). В настоящей работе введем некоторое обобщение этих понятий, рассмотрев свойства $\mathbb{B}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$ множества $\mathfrak{A}$.

Определение 2. Будем говорить, что множество $\mathfrak{A} \subset T^N$, $N \geqslant 1$, *обладает свойством* $\mathbb{B}_k$, $1 \leqslant k \leqslant N$, если существует множество W_k вида (0.6) такое, что $\mu(W_k \setminus \mathfrak{A}) = 0$, причем свойство $\mathbb{B}_k$ есть свойство $\mathbb{B}_k(W_k^0)$, если $W_k = W(W_k^0)$.

Замечание 1. Учитывая определения (0.4)–(0.6) множеств W_J, W_k^0, W_k, видим, что при $k = N$ $W_J = W_N^0 = W_N$. Следовательно, множество $\mathfrak{A} \subset T^N$, обладающее свойством $\mathbb{B}_N$, – это множество, для которого существует открытое множество $\Omega \subset T^N$ такое, что $\mu(\Omega \setminus \mathfrak{A}) = 0$.

Замечание 2. Если множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_k$, то оно обладает и свойством $\mathbb{B}_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$. Обратное, вообще говоря, неверно.

4. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset T^N$, – произвольное измеримое множество, $\mu\mathfrak{A} > 0$ $(N \geqslant 1)$. И. Л. Блошанский доказал (см. [7]–[10]), что для такого множества $\mathfrak{A}$ и любой функции $f \in L_p$ $(p \geqslant 1)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x; f) = 0 \text{ для почти всех } x \in W_k^0, \ k = k(p, N), \tag{0.7}$$

тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_k(W_k^0)$, $k = 1, 2$, причем

а) если $p = 1$, $N \geqslant 1$, то в оценке (0.7) $k = 1$,

б) если $p > 1$, $N \geqslant 2$, то в оценке (0.7) $k = 2$.[1)]

Таким образом, учитывая определение 1, на множестве $\mathfrak{A} \subset T^N$ $(N \geqslant 1)$ в классе L_p $(p \geqslant 1)$ справедлива СОЛ тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_k$, $k = k(p, N) = 1, 2$; причем $k = 1$, если $p = 1$, $N \geqslant 1$ и $k = 2$, если $p > 1$, $N \geqslant 2$ (см. [9; теоремы 2, 4] и [11; теорема 2]).

Итак, видим, что для случая $N \geqslant 1$ в классе L_1 справедливость или несправедливость на множестве $\mathfrak{A} \subset T^N$ СОЛ определяется структурой и геометрией множества $\mathfrak{A}$, которые описываются свойством $\mathbb{B}_1$. При повышении гладкости рассматриваемых функций (т.е. для функций из L_p, $p > 1$) в случае $N \geqslant 2$ свойство $\mathbb{B}_1$ множества $\mathfrak{A}$ заменяется свойством $\mathbb{B}_2$, т.е. "жесткие" условия на геометрию и структуру множества $\mathfrak{A}$ (определяемые свойством $\mathbb{B}_1$), заменяются более "мягкими" условиями, накладываемыми на ту же геометрию и структуру множества $\mathfrak{A}$ (определяемыми уже свойством $\mathbb{B}_2$).

Возникает вопрос о еще большем ослаблении условий, накладываемых на геометрию и структуру множества $\mathfrak{A}$ (в терминах свойств $\mathbb{B}_k$, $2 < k \leqslant N$), если рассматривать СОЛ при $N \geqslant 3$ для более гладких функций, например, в классах $H^\omega(T^N)$.

5. В настоящей работе доказано, что такими "мягкими" условиями (на геометрию и структуру множества $\mathfrak{A}$) для справедливости СОЛ на $\mathfrak{A}$ в классах $H^\omega(T^N)$, $N \geqslant 3$, является свойство $\mathbb{B}_3$. Точнее, в статье получены следующие достаточные условия справедливости СОЛ для рядов Фурье функций из $H^\omega(T^N)$, $N \geqslant 3$, $\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$, $\delta \to +0$.

[1)]Заметим, что, в отличие от случая $p = 1$, необходимость в случае $p > 1$ доказана в [10] при некоторых дополнительных ограничениях на границу множества $\mathfrak{A}$.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset T^N$, *– произвольное измеримое множество,* $N \geqslant 3$, $\mu\mathfrak{A} > 0$. *Пусть* $f(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$ *и* $f \in H^\omega(T^N)$, *где*

$$\omega(\delta) = o\Big(\Big[\log\frac{1}{\delta}\log\log\log\frac{1}{\delta}\Big]^{-1}\Big) \quad \text{при} \quad \delta \to +0. \tag{0.8}$$

Тогда если множество $\mathfrak{A}$ *обладает свойством* $\mathbb{B}_3(W_3^0)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x;f) = 0 \ \ \text{для почти всех} \ \ x \in W_3^0.$$

Замечание. Несколько модифицируя конструкцию примера функции, построенной М. Бахбухом и Е. М. Никишиным в работе [12] (функции $f \in H^\omega(T^2)$, $\omega(\delta) = (\log(1/\delta))^{-1}$, двойной ряд Фурье которой расходится п.в. на T^2), и используя технику построения контрпримеров, предложенную одним из авторов в [5], [6], можно указать (не пустые) открытые множества $\mathfrak{A} \subset T^N$, $N \geqslant 3$ (не обладающие свойством $\mathbb{B}_3$) такие, что в каждом классе $H^\omega(T^N)$, определяемом модулем непрерывности

$$\widetilde{\omega}(\delta) = \lambda(\delta)\Big(\log\frac{1}{\delta}\Big)^{-\left[\frac{N-1}{2}\right]}, \ \text{где} \left[\frac{N-1}{2}\right] \text{– целая часть} \ \frac{N-1}{2},$$

а $\lambda(\delta)$ – произвольная функция, монотонно стремящаяся к $+\infty$ при $\delta \to +0$, найдутся функции $f(x)$, равные нулю на $\mathfrak{A}$, такие, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(x;f)| = +\infty \ \text{для почти всех} \ x \in T^N.$$

Сформулированный результат доказывает существование (не пустых) открытых подмножеств T^N, $N \geqslant 3$, на которых в классах $H^{\widetilde{\omega}}(T^N)$ не справедлива не только обобщенная локализация, но и, более того, слабая обобщенная локализация (последнее есть следствие того, что указанные подмножества не обладают свойством $\mathbb{B}_3$).

Далее в § 1 будет доказана лемма, с помощью которой в § 2 будет доказана теорема.

§ 1. О поведении частичных сумм кратных рядов Фурье функций из класса H^ω, $\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$

Положим $D_n(u) = D_{n_1}(u_1)\cdots D_{n_N}(u_{n_N})$, где

$$D_{n_j}(u_{n_j}) = \frac{\sin(n_j + \frac{1}{2})u_j}{2\sin\frac{u_j}{2}}$$

– одномерные ядра Дирихле, $j = 1, \ldots, N$. С помощью введенного ядра $D_n(u)$ прямоугольную частичную сумму (0.2) ряда Фурье функции $f(x)$ можно представить в следующем виде

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi^N} \int_{T^N} f(x+u) D_n(u)\, du, \qquad n \in \mathbb{Z}_0^N. \tag{1.1}$$

Пусть r, ν, l – целые числа, $0 \leqslant r, \nu, l \leqslant N$, и пусть $k = (k_1, \ldots, k_N) \in \mathbb{Z}^N$. Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta(r,\nu,l) = \{k \in \mathbb{Z}^N : 0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_r \leqslant N;& \\ 0 = k_0 < k_{r+1} < \cdots < k_{r+\nu} \leqslant N;& \\ 1 \leqslant k_{r+\nu+1} < \cdots < k_{r+\nu+l} \leqslant N;\ k_{s_1} \neq k_{s_2} \text{ при } s_1 \neq s_2\},& \\ 0 \leqslant r, \nu, l \leqslant N, \qquad r + \nu + l = N.& \end{aligned} \tag{1.2}$$

Лемма. *Пусть $f \in H^\omega(T^N)$, где $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию* (0.8). *Тогда для любого вектора $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_N) \in \mathbb{R}^N$, $0 < \delta_j \leqslant \pi$, $j = 1, \ldots, N$,*

$$S_n(x; f) = J_n(\delta, x, f) + \alpha_n(\delta, x, f), \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned} J_n(\delta, x, f) = \frac{1}{\pi^N} \Bigg\{ & \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \cdots \int_{-\delta_N}^{\delta_N} \\ & + \sum_{\substack{1 \leqslant r, l \leqslant N \\ 3 \leqslant \nu \leqslant N \\ r+\nu+l=N}} \sum_{k \in \Delta(r,\nu,l)} \int_{-\pi}^{-\delta_{k_1}} \cdots \int_{-\pi}^{-\delta_{k_r}} \int_{-\delta_{k_{r+1}}}^{\delta_{k_{r+1}}} \cdots \int_{-\delta_{k_{r+\nu}}}^{\delta_{k_{r+\nu}}} \int_{\delta_{k_{r+\nu+1}}}^{\pi} \cdots \int_{\delta_{k_{r+\nu+l}}}^{\pi} \\ & + \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant N \\ 3 \leqslant \nu \leqslant N \\ \nu+l=N}} \sum_{k \in \Delta(0,\nu,l)} \int_{-\delta_{k_1}}^{\delta_{k_1}} \cdots \int_{-\delta_{k_\nu}}^{\delta_{k_\nu}} \int_{\delta_{k_{\nu+1}}}^{\pi} \cdots \int_{\delta_{k_{\nu+l}}}^{\pi} \\ & + \sum_{\substack{1 \leqslant r \leqslant N \\ 3 \leqslant \nu \leqslant N \\ r+\nu=N}} \sum_{k \in \Delta(r,\nu,0)} \int_{-\pi}^{-\delta_{k_1}} \cdots \int_{-\pi}^{-\delta_{k_r}} \int_{-\delta_{k_{r+1}}}^{\delta_{k_{r+1}}} \cdots \int_{-\delta_{k_{r+\nu}}}^{\delta_{k_{r+\nu}}} \Bigg\} \\ & \times f(x+u) D_n(u)\, du_{k_1} \ldots du_{k_N}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

множество $\Delta(r, \nu, l)$ определено в (1.2); *а $\alpha_n(\delta, x, f)$ имеет следующую оценку: существует номер $\theta = \theta(f) \in \mathbb{Z}_{16}^1$ такой, что*[2)]

$$\Big\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_\theta^N} |\alpha_n(\delta, x, f)| \Big\|_{L_p(T^N)} \leqslant C(p, \delta) \cdot \big[\omega(1, f) + \|f\|_{L_p(T^N)}\big], \qquad p > 1, \tag{1.5}$$

константа $C(p, \delta)$ в (1.5) *не зависит от функции f.*

[2)] Не ограничивая общности будем считать, что логарифмы в условии (0.8) по основанию 2.

Доказательство леммы. Фиксируем произвольное $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N) \in \mathbb{R}^N$, $0 < \delta_j \leqslant \pi$, $j = 1, \dots, N$, и распишем частичную сумму (1.1), используя обозначения (1.2), следующим образом:

$$
\begin{aligned}
S_n(x; f) &= \frac{1}{\pi^N}\left\{\int_{-\pi}^{-\delta_1} + \int_{-\delta_1}^{\delta_1} + \int_{\delta_1}^{\pi}\right\}\cdots\left\{\int_{-\pi}^{-\delta_N} + \int_{-\delta_N}^{\delta_N} + \int_{\delta_N}^{\pi}\right\} f(x+u) D_n(u)\,du \\
&= \sum_{\substack{0\leqslant r,\nu,l\leqslant N\\ r+\nu+l=N}} \sum_{k\in\Delta(r,\nu,l)} \frac{1}{\pi^N}\int_{-\pi}^{-\delta_{k_1}}\cdots\int_{-\pi}^{-\delta_{k_r}}\int_{-\delta_{k_{r+1}}}^{\delta_{k_{r+1}}}\cdots \\
&\qquad \cdots\int_{-\delta_{k_{r+\nu}}}^{\delta_{k_{r+\nu}}}\int_{\delta_{k_{r+\nu+1}}}^{\pi}\cdots\int_{\delta_{k_{r+\nu+l}}}^{\pi} f(x+u) D_n(u)\,du_{k_1}\dots du_{k_N} \\
&= \sum_{\substack{0\leqslant r,\nu,l\leqslant N\\ r+\nu+l=N}} \sum_{k\in\Delta(r,\nu,l)} A_n^{(r,\nu,l)}(k;\delta,x,f).
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

При этом предполагаем, что при $r = 0$ в (1.6) отсутствуют интегралы вида $\int_{-\pi}^{-\delta_j}$, при $\nu = 0$ – интегралы вида $\int_{-\delta_j}^{\delta_j}$, при $l = 0$ – интегралы вида $\int_{\delta_j}^{\pi}$, где $j = 1, \dots, N$.

Обозначим через $B_n^{(r,\nu,l)}(\delta, x, f)$ внутреннюю сумму в (1.6), т.е.

$$
B_n^{(r,\nu,l)}(\delta, x, f) = \sum_{k\in\Delta(r,\nu,l)} A_n^{(r,\nu,l)}(k;\delta,x,f), \tag{1.7}
$$

причем число слагаемых в сумме (1.7), в силу определения множества $\Delta(r,\nu,l)$, равно $\dfrac{N!}{r!\,\nu!\,l!}$.

В таком случае, учитывая (1.6) и (1.7), имеем

$$
S_n(x; f) = \sum_{\substack{0\leqslant r,\nu,l\leqslant N\\ r+\nu+l=N}} B_n^{(r,\nu,l)}(\delta, x, f).
$$

Разобьем последнюю сумму на четыре суммы, т.е.

$$
\begin{aligned}
S_n(x; f) &= \left\{\sum_{\substack{0\leqslant r,l\leqslant N\\ 3\leqslant\nu\leqslant N\\ r+\nu+l=N}} + \sum_{\substack{0\leqslant r,l\leqslant N\\ \nu=0\\ r+l=N}} + \sum_{\substack{0\leqslant r,l\leqslant N\\ \nu=1\\ r+l=N-1}} + \sum_{\substack{0\leqslant r,l\leqslant N\\ \nu=2\\ r+l=N-2}}\right\} B_n^{(r,\nu,l)}(\delta, x, f) \\
&= J_n(\delta, x, f) + \sum_{s=1}^{3}\alpha_n^{(s)}(\delta, x, f) = J_n(\delta, x, f) + \alpha_n(\delta, x, f).
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

Заметим, принимая во внимание обозначения (1.6)–(1.8), что первое слагаемое в (1.8) – $J_n(\delta, x, f)$ – совпадает с (1.4). Оценим второе слагаемое – $\alpha_n(\delta, x, f)$ – в (1.8). Для этого оценим каждое из слагаемых $\alpha_n^{(s)}(\delta, x, f)$, $s = 1, 2, 3$.

Предложение 1. *Для любого вектора* $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N) \in \mathbb{R}^N$, $0 < \delta_j \leqslant \pi$, $j = 1, \dots, N$,

$$\Big\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^N} |\alpha_n^{(1)}(\delta, x, f)| \Big\|_{L_1(T^N)} = \Big\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^N} \Big| \sum_{\substack{0 \leqslant r, l \leqslant N \\ r+l=N}} B_n^{(r,0,l)}(\delta, x, f) \Big| \Big\|_{L_1(T^N)} \leqslant C(\delta) \|f\|_{L_1(T^N)},$$

где константа $C(\delta)$ *не зависит от функции* f.

Предложение 2. *Для любого вектора* $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N) \in \mathbb{R}^N$, $0 < \delta_j \leqslant \pi$, $j = 1, \dots, N$,

$$\Big\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^N} |\alpha_n^{(2)}(\delta, x, f)| \Big\|_{L_p(T^N)} = \Big\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^N} \Big| \sum_{\substack{0 \leqslant r, l \leqslant N \\ r+l=N-1}} B_n^{(r,1,l)}(\delta, x, f) \Big| \Big\|_{L_p(T^N)} \leqslant C(p, \delta) \|f\|_{L_p(T^N)}, \qquad p > 1,$$

где константа $C(p, \delta)$ *не зависит от функции* f.

Предложение 3. *Существует номер* $\theta = \theta(f) \in \mathbb{Z}_{16}^1$ *такой, что для любого вектора* $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N) \in \mathbb{R}^N$, $0 < \delta_j \leqslant \pi$, $j = 1, \dots, N$,

$$\Big\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_\theta^N} |\alpha_n^{(3)}(\delta, x, f)| \Big\|_{L_p(T^N)} = \Big\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_\theta^N} \Big| \sum_{\substack{0 \leqslant r, l \leqslant N \\ r+l=N-2}} B_n^{(r,2,l)}(\delta, x, f) \Big| \Big\|_{L_p(T^N)} \leqslant C(p, \delta) \cdot \big[\omega(1, f) + \|f\|_{L_p(T^N)}\big], \qquad p > 1,$$

где константа $C(p, \delta)$ *не зависит от функции* f.

Доказательство первых двух предложений было проведено И. Л. Блошанским в работе [9; теорема 1]. Докажем предложение 3.

Доказательство предложения 3.

Оценим $B_n^{(r,\nu,l)}(\delta, x, f)$ при $\nu = 2$. Для этого рассмотрим и оценим каждое слагаемое в сумме (1.7) при $\nu = 2$. В этом случае для произвольного вектора $k \in \Delta(r, 2, l)$ соответствующее слагаемое в (1.7) имеет вид:

$$A_n^{(r,2,l)}(k; \delta, x, f) = \frac{1}{\pi^N} \int_{-\pi}^{-\delta_{k_1}} \dots \int_{-\pi}^{-\delta_{k_r}} \int_{-\delta_{k_{r+1}}}^{\delta_{k_{r+1}}} \int_{-\delta_{k_{r+2}}}^{\delta_{k_{r+2}}} \int_{\delta_{k_{r+3}}}^{\pi} \dots$$

$$\dots \int_{\delta_{k_{r+2+l}}}^{\pi} f(x_1 + u_1, \dots, x_N + u_N) D_{n_1}(u_1) \cdots D_{n_N}(u_N)\, du_{k_1} \dots du_{k_N}, \tag{1.9}$$

$$0 \leqslant r, l \leqslant N - 2, \quad r + l = N - 2.$$

Заметим, что при $l=0$ интегралы вида $\int_{\delta_j}^{\pi}$, $1\leqslant j\leqslant N$, в (1.9) отсутствуют.

Обозначим $y_j = x_{k_{r+j}}$, $j=1,2$, $y=(y_1,y_2)\in T^2$,

$$\widetilde{x} = (x_{k_1},\dots,x_{k_r},x_{k_{r+3}},\dots,x_{k_N})\in T^{N-2}_{M\setminus J^*},$$

где $J^* = J_2^* = (k_{r+1},k_{r+2})\subset M$, и положим

$$\widetilde{f} = \widetilde{f}(y) = \widetilde{f}(y;\widetilde{x}) = f(x); \tag{1.10}$$

обозначим также $m_j = n_{k_{r+j}}$, $t_j = u_{k_{r+j}}$, $j=1,2$, $m=(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}_0^2$, $t=(t_1,t_2)\in T^2$ и

$$\widetilde{u} = (u_{k_1},\dots,u_{k_r},u_{k_{r+3}},\dots,u_{k_N})\in T^{N-2}_{M\setminus J^*}.$$

Оценим $A_n^{(r,2,l)}(k;\delta,x,f)$. Так как

$$|D_{n_j}(u_j)|\leqslant C_0(\delta_j) = \text{const} \quad \text{при} \quad \delta_j\leqslant|u_j|\leqslant\pi,\quad j=1,\dots,N, \tag{1.11}$$

то, учитывая (1.11), 2π-периодичность функции f по каждой из переменных x_j и обозначения (1.10), из (1.9) получаем

$$|A_n^{(r,2,l)}|\leqslant C_1(\delta)\int_{T^{N-2}_{M\setminus J^*}}\big|\widetilde{S}_m\big(y;\widetilde{f}(\,\cdot\,,\widetilde{u})\big)\big|\,d\widetilde{u}, \tag{1.12}$$

где через $\widetilde{S}_m(y;\widetilde{f}\,)$ обозначен интеграл

$$\widetilde{S}_m(y;\widetilde{f}\,) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\delta_{k_{r+1}}}^{\delta_{k_{r+1}}}\int_{-\delta_{k_{r+2}}}^{\delta_{k_{r+2}}}\widetilde{f}(y_1+t_1,y_2+t_2)D_{m_1}(t_1)D_{m_2}(t_2)\,dt_2\,dt_2. \tag{1.13}$$

Фиксируем произвольное $\widetilde{u}\in T^{N-2}_{M\setminus J^*}$ и оценим интеграл (1.13). Запишем $\widetilde{S}_m(y;\widetilde{f}\,)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_m(y;\widetilde{f}\,) = \frac{1}{\pi^2}\Bigg\{&\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\\
&-\Bigg[\int_{-\pi}^{-\delta_{k_{r+1}}}\int_{-\pi}^{-\delta_{k_{r+2}}}+\int_{-\pi}^{-\delta_{k_{r+1}}}\int_{\delta_{k_{r+2}}}^{\pi}\\
&\qquad+\int_{\delta_{k_{r+1}}}^{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta_{k_{r+2}}}+\int_{\delta_{k_{r+1}}}^{\pi}\int_{\delta_{k_{r+2}}}^{\pi}\Bigg]\\
&-\Bigg[\int_{-\delta_{k_{r+1}}}^{\delta_{k_{r+1}}}\int_{-\pi}^{-\delta_{k_{r+2}}}+\int_{-\delta_{k_{r+1}}}^{\delta_{k_{r+1}}}\int_{\delta_{k_{r+2}}}^{\pi}\\
&\qquad+\int_{-\pi}^{-\delta_{k_{r+1}}}\int_{-\delta_{k_{r+2}}}^{\delta_{k_{r+2}}}+\int_{\delta_{k_{r+1}}}^{\pi}\int_{-\delta_{k_{r+2}}}^{\delta_{k_{r+2}}}\Bigg]\Bigg\}\widetilde{f}(y+t)D_m(t)\,dt\\
={}& S_m(y;\widetilde{f}\,)-\widetilde{S}_m^{(1)}(y;\widetilde{f}\,)-\widetilde{S}_m^{(2)}(y;\widetilde{f}\,).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Рассмотрим первое слагаемое в (1.14) – двойную частичную сумму функции $\widetilde{f}$. Можем записать

$$|S_m(y;\widetilde{f}\,)| \leqslant |S_m(y;\widetilde{f}\,) - \widetilde{f}(y)| + |\widetilde{f}(y)| = |R_m(y;\widetilde{f}\,)| + |\widetilde{f}(y)|, \quad m \in \mathbb{Z}_0^2. \tag{1.15}$$

Оценим $|R_m(y;\widetilde{f}\,)|$. Пусть для определенности $m_2 \geqslant m_1 \geqslant 2$, тогда распишем $R_m(y;\widetilde{f}\,)$ так:

$$R_m(y;\widetilde{f}\,) = I_m^{(1)}(y;\widetilde{f}\,) + I_m^{(2)}(y;\widetilde{f}\,), \tag{1.16}$$

где

$$\begin{aligned} I_m^{(1)}(y;\widetilde{f}\,) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(t_1,t_2)D_{m_2}(t_2-y_2)\,dt_2 - \widetilde{f}(t_1,y_2)\right]D_{m_1}(t_1-y_1)\,dt_1 \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big[S_{m_2}\big(y_2;\widetilde{f}(t_1,\,\cdot\,)\big) - \widetilde{f}(t_1,y_2)\big]D_{m_1}(t_1-y_1)\,dt_1, \end{aligned} \tag{1.17}$$

а

$$I_m^{(2)}(y;\widetilde{f}\,) = I_{m_1}^{(2)}(y;\widetilde{f}\,) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(t_1,y_2)D_{m_1}(t_1-y_1)\,dt_1 - \widetilde{f}(y_1,y_2).$$

В работе К. И. Осколкова [7] получена следующая оценка разности $\rho_n(x,\varphi) = |S_n(x;\varphi) - \varphi(x)|$ для непрерывной функции $\varphi \in C(T^1)$, имеющей некоторый модуль непрерывности $\omega(\delta) = \omega(\delta,\varphi)$, удовлетворяющий условию $\dfrac{\omega(\delta)}{\delta} \to \infty$ при $\delta \to +0$:

$$\rho_n(x,\varphi) \leqslant C_\varphi(x)\cdot\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\log\log\frac{3\cdot\omega(1)}{\omega(\frac{1}{n})}, \qquad n = 1,2,\dots, \tag{1.18}$$

где $C_\varphi(x)$ – неотрицательная конечная п.в. функция, не зависящая от n и имеющая функцию распределения

$$\lambda(\alpha) = \mu_1\{x \in T^1 : C_\varphi(x) > \alpha\} \leqslant ce^{-\alpha/c}, \qquad \alpha > 0, \quad c = \mathrm{const} \tag{1.19}$$

(см. [7; теорема 3]).

Оценка (1.19) позволяет, в частности, сделать вывод о равномерной (по φ) ограниченности следующего интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi}[C_\varphi(x)]^p\,dx \leqslant c(p) = \mathrm{const}, \qquad p > 1. \tag{1.20}$$

Оценки (1.18) и (1.20) дают возможность получить (аналогично оценке (53) в работе [7]) следующую оценку для разности $I_m^{(1)}$, $m \in \mathbb{Z}_2^2$, в (1.17):

$$\begin{aligned} |I_m^{(1)}(y;\widetilde{f}\,)| &\leqslant \mathrm{const}\cdot\log m_1\cdot\sup_{y_1\in\Delta}\frac{1}{\mu_1\Delta}\int_\Delta\big|S_{m_2}\big(y_2;\widetilde{f}(t_1,\,\cdot\,)\big) - \widetilde{f}(t_1,y_2)\big|\,dt_1 \\ &\leqslant \mathrm{const}\cdot\log m_1\cdot\omega\Big(\frac{1}{m_2}\Big)\log\log\frac{3\cdot\omega(1)}{\omega(\frac{1}{m_2})}\cdot\sup_{y_1\in\Delta}\frac{1}{\mu_1\Delta}\int_\Delta K_1(t_1,y_2;\widetilde{f}\,)\,dt_1, \end{aligned} \tag{1.21}$$

где
$$\omega(\delta) = \omega(\delta, \widetilde{f}\,) = \sup_{\substack{|y-t|\leqslant\delta \\ y,t\in T^2}} |\widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(t)|,$$

а функция $K_1(t_1, y_2; \widetilde{f}\,)$ для каждого фиксированного t_1 неотрицательна и конечна для п.в. y_2, данная функция также удовлетворяет оценке типа (1.20), т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} [K_1(t_1, y_2; \widetilde{f}\,)]^p \, dy_2 \leqslant c(p) = \text{const} \;\; \text{для всех } t_1, \quad p > 1. \tag{1.22}$$

Обозначив
$$K_2(y; \widetilde{f}\,) = \sup_{y_1\in\Delta} \frac{1}{\mu_1\Delta} \int_{\Delta} K_1(t_1, y_2; \widetilde{f}\,)\, dt_1$$

и учитывая, что максимальная функция Харди–Литтлвуда есть оператор сильного типа (p,p), $p > 1$ (по переменной y_1), из (1.22) получаем:

$$\begin{aligned}
\int_{T^2} \{K_2(y; \widetilde{f}\,)\}^p \, dy &\leqslant c_1(p) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \{K_1(y_1, y_2; \widetilde{f}\,)\}^p \, dy_1 \right) dy_2 \\
&= c_1(p) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \{K_1(y_1, y_2; \widetilde{f}\,)\}^p \, dy_2 \right) dy_1 \\
&\leqslant c_2(p) = \text{const}, \qquad p > 1.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Далее, так как для функции $f(x)$ справедлива оценка (0.8), то равномерно по $\widetilde{x} \in T^{N-2}_{M\setminus J^*}$ модуль непрерывности функции $\widetilde{f}(y) = \widetilde{f}(y; \widetilde{x}) = f(x)$ (см. (1.10)) удовлетворяет условию:

$$\omega(\delta, \widetilde{f}\,) = \sup_{\substack{|y-t|\leqslant\delta \\ y,t\in T^2}} |\widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(t)| = o\Big(\Big[\log \frac{1}{\delta} \log\log\log \frac{1}{\delta}\Big]^{-1} \Big) \;\; \text{при} \;\; \delta \to +0.$$

В таком случае, существует номер $\theta = \theta(f) \in \mathbb{Z}^1_{16}$ такой, что

$$\log m_1 \log\log\log m_1 \cdot \omega\Big(\frac{1}{m_1}, \widetilde{f}\Big) < 3 \cdot \omega(1, \widetilde{f}\,) \;\; \text{при} \;\; m_1 \geqslant \theta. \tag{1.24}$$

Из оценки (1.21), учитывая (1.24) и принимая во внимание условие $m_1 \leqslant m_2$, получаем

$$|I^{(1)}_m(y; \widetilde{f}\,)| \leqslant \text{const} \cdot K_2(y; \widetilde{f}\,) \cdot \omega(1, \widetilde{f}\,) \;\; \text{при} \;\; m_2 \geqslant m_1 > \theta. \tag{1.25}$$

Аналогично, имеет место следующая оценка для $I^{(2)}_m(y; \widetilde{f}\,)$

$$|I^{(2)}_m(y; \widetilde{f}\,)| = |I^{(2)}_{m_1}(y; \widetilde{f}\,)| \leqslant \text{const} \cdot K_3(y; \widetilde{f}\,) \cdot \omega(1, \widetilde{f}\,) \;\; \text{при} \;\; m_1 \geqslant 16, \tag{1.26}$$

где функция $K_3(y;\widetilde{f})$ удовлетворяет оценке, аналогичной (1.23). Таким образом, из (1.16), учитывая оценки (1.25) и (1.26) имеем:

$$|R_m(y;\widetilde{f})| \leqslant \mathrm{const}\cdot K_4(y;\widetilde{f}), \qquad m \in \mathbb{Z}^2_\theta, \tag{1.27}$$

где функция $K_4(y;\widetilde{f})$ удовлетворяет оценке, аналогичной (1.23). В свою очередь, оценки (1.15), (1.27) и (1.23) позволяют получить оценку для мажоранты частичной суммы функции $\widetilde{f}(x)$:

$$\Big\|\sup_{m\in\mathbb{Z}^2_\theta} |S_m(y;\widetilde{f})|\Big\|_{L_p(T^2)} \leqslant C(p)\big[\mathrm{const}\cdot\omega(1,\widetilde{f}) + \|\widetilde{f}\|_{L_p(T^2)}\big], \quad p > 1. \tag{1.28}$$

Теперь оценим второе слагаемое в (1.14) – $\widetilde{S}^{(1)}_m(y;\widetilde{f})$. Для этого рассмотрим и оценим следующий интеграл (являющийся одним из слагаемых в сумме $\widetilde{S}^{(1)}_m(y;\widetilde{f})$):

$$J^{(1)}_m = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{-\delta_{k_r+1}}\int_{-\pi}^{-\delta_{k_r+2}} \widetilde{f}(y_1+t_1, y_2+t_2)D_{m_1}(t_1)D_{m_2}(t_2)\,dt_1\,dt_2. \tag{1.29}$$

Остальные интегралы из $\widetilde{S}^{(1)}_m(y;\widetilde{f})$ оцениваются аналогично. Учитывая (1.11), имеем

$$|J^{(1)}_m| \leqslant C_2(\delta)\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{f}((y_1+t_1, y_2+t_2)|\,dt_1\,dt_2,$$

где $C_2(\delta) = \dfrac{1}{\pi^2}C_0(\delta_{k_r+1})\cdot C_0(\delta_{k_r+2})$. Таким образом, для мажоранты $\widetilde{S}^{(1)}_m(y;\widetilde{f})$ получаем

$$\Big\|\sup_{m\in\mathbb{Z}^2_0} |\widetilde{S}^{(1)}_m(y;\widetilde{f})|\Big\|_{L_1(T^2)} \leqslant 16\pi^2 C_2(\delta)\|\widetilde{f}\|_{L_1(T^2)}. \tag{1.30}$$

И, наконец, оценим третье слагаемое в (1.14) – $\widetilde{S}^{(2)}_m(y;\widetilde{f})$. Докажем, что

$$\Big\|\sup_{m\in\mathbb{Z}^2_0} |\widetilde{S}^{(2)}_m(y;\widetilde{f})|\Big\|^p_{L_p(T^2)} \leqslant C_0(p,\delta)\|\widetilde{f}\|^p_{L_p(T^2)}, \qquad p > 1. \tag{1.31}$$

Приведем краткое доказательство оценки (1.31) (подробное доказательство подобных оценок было проведено одним из авторов в работе [9; теорема 1]). Заметим, что нам достаточно оценить один из интегралов, входящих в $\widetilde{S}^{(2)}_m(y;\widetilde{f})$, например, следующий:

$$J_m(y;\widetilde{f}) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{-\delta_{k_r+1}}\int_{-\delta_{k_r+2}}^{\delta_{k_r+2}} \widetilde{f}(y_1+t_1, y_2+t_2)D_{m_1}(t_1)D_{m_2}(t_2)\,dt_1\,dt_2; \tag{1.32}$$

остальные интегралы из $\widetilde{S}_m^{(2)}(y;\widetilde{f})$ оцениваются аналогично. Учитывая 2π-периодичность функции $\widetilde{f}$ по переменной y_1 и оценку (1.11), получаем

$$|J_m(y;\widetilde{f})| \leqslant \frac{1}{\pi} C_0(\delta_{k_{r+1}}) \times \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{-\delta_{k_{r+2}}} - \int_{\delta_{k_{r+2}}}^{\pi} \right\} \widetilde{f}(t_1, y_2 + t_2) D_{m_2}\, dt_2 \right| dt_1. \tag{1.33}$$

Используя оценку Р. Ханта (см. [13])

$$\left\| \sup_{n\in \mathbf{Z}_0^1} |S_n(x,g)| \right\|_{L_p(T^1)} \leqslant C(p) \|g\|_{L_p(T^1)}, \qquad p > 1, \tag{1.34}$$

для частичной суммы

$$S_{m_2}(y_2;\widetilde{f},t_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(t_1, y_2 + t_2) D_{m_2}(t_2)\, dt_2 \tag{1.35}$$

функции $\widetilde{f} \in C(T^2)$ по переменной y_2, получим оценку для мажоранты

$$S_*(y_2;\widetilde{f},t_1) = \sup_{m_2\in \mathbf{Z}_0^1} |S_{m_2}(y_2;\widetilde{f},t_1)|. \tag{1.36}$$

А именно,

$$\|S_*(y_2;\widetilde{f},t_1)\|_{L_p(T^1)}^p \leqslant C(p) \int_{-\pi}^{\pi} |f(t_1,t_2)|^p\, dt_2, \qquad p > 1. \tag{1.37}$$

Используя неравенство Гёльдера и (1.37), учитывая (1.32)–(1.36), получаем оценку для мажоранты $J_m(y;\widetilde{f})$

$$\left\| \sup_{m\in \mathbf{Z}_0^2} |J_m(y;\widetilde{f})| \right\|_{L_p(T^2)}^p \leqslant C_0(p,\delta) \|\widetilde{f}\|_{L_p(T^2)}^p, \qquad p > 1, \tag{1.38}$$

что и доказывает (1.31).

Обозначим

$$S_*(y;\widetilde{f}) = \sup_{m\in \mathbf{Z}_\theta^2} |\widetilde{S}_m(y;\widetilde{f})|. \tag{1.39}$$

Тогда, учитывая равенство (1.14) и оценки (1.28), (1.30), (1.31), имеем

$$\|S_*(y;\widetilde{f})\|_{L_p(T^2)} \leqslant C(p) \cdot \omega(1,\widetilde{f}) + C_0(p,\delta) \|\widetilde{f}\|_{L_p(T^2)}, \qquad p > 1, \tag{1.40}$$

где константы $C(p)$, $C_0(p,\delta)$ не зависят от функции $\widetilde{f}$.

Итак, для $A_n^{(r,2,l)}$ (см. (1.9)), учитывая (1.12)–(1.14) и обозначения (1.10), (1.39), используя неравенство Гёльдера и оценку (1.40), получаем:

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sup_{n\in\mathbf{Z}_\theta^N} |A_n^{(r,2,l)}(k;\delta,x,f)| \Big\|_{L_p(T^N)} \\
&\quad\leqslant C_1(\delta)\bigg\{\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\bigg(\iint_{T^2} |S_*(x_{k_{r+1}},x_{k_{r+2}};f)|^p\,dx_{k_{r+1}}\,x_{k_{r+2}}\bigg) \\
&\qquad\qquad du_{k_1}\dots du_{k_r}\,du_{k_{r+3}}\dots du_{k_N}\bigg\}^{1/p} \\
&\quad\leqslant C(p,\delta)\big[\omega(1,f)+\|f\|_{L_p(T^N)}\big], \\
&\qquad 0\leqslant r,l\leqslant N-2, \qquad r+l=N-2, \qquad k\in\Delta(r,2,l).
\end{aligned}\tag{1.41}$$

В силу произвольности выбора вектора k из множества $\Delta(r,2,l)$ (см. (1.2)) последняя оценка справедлива для каждого слагаемого в сумме (1.7) при $\nu = 2$. Следовательно, используя неравенства Гёльдера, Минковского и учитывая количество слагаемых в сумме (1.17) при $\nu = 2$ (или, что то же самое, количество элементов в множестве $\Delta(r,2,l)$), получаем

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sup_{n\in\mathbf{Z}_\theta^N} |B_n^{(r,2,l)}(\delta,x,f)| \Big\|_{L_p(T^N)}^p \\
&\quad= \Big\| \sup_{n\in\mathbf{Z}_\theta^N} \Big| \sum_{k\in\Delta(r,2,l)} A_n^{(r,2,l)}(k;\delta,x,f) \Big| \Big\|_{L_p(T^N)}^p \\
&\quad\leqslant \left[\frac{N!}{2\cdot r!\,l!}\right]^{p-1} \sum_{k\in\Delta(r,2,l)} \Big\| \sup_{n\in\mathbf{Z}_\theta^N} |A_n^{(r,2,l)}(k;\delta,x,f)| \Big\|_{L_p(T^N)}^p \\
&\quad\leqslant \left[\frac{N!}{2\cdot r!\,l!}\,C_3(p,\delta)\right]^p \big[\omega(1,f)+\|f\|_{L_p(T^N)}\big]^p.
\end{aligned}$$

то есть,

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sup_{n\in\mathbf{Z}_\theta^N} |B_n^{(r,2,l)}(\delta,x,f)| \Big\|_{L_p(T^N)} \leqslant \frac{N!}{2\cdot r!\,l!} C_3(p,\delta)\big[\omega(1,f)+\|f\|_{L_p(T^N)}\big], \\
&\qquad 0\leqslant r,l\leqslant N-2, \qquad r+l=N-2.
\end{aligned}\tag{1.42}$$

Таким образом,

$$\Big\| \sup_{n\in\mathbf{Z}_\theta^N} |\alpha_n^{(3)}(\delta,x,f)| \Big\|_{L_p(T^N)} \leqslant C_4(p,\delta)\big[\omega(1,f)+\|f\|_{L_p(T^N)}\big],$$

где константа $C_4(p,\delta)$ не зависит от функции f.

Предложение 3 доказано.

Из предложений 1–3 получаем оценку для мажоранты $\alpha_n(\delta,x,f)$, $\alpha_n(\delta,x,f) = \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_n^{(3)}(\delta,x,f)$, $s=1,2,3$:

$$\Bigl\| \sup_{n\in\mathbb{Z}_\theta^N} |\alpha_n(\delta,x,f)| \Bigr\|_{L_p(T^N)} \leqslant C_5(p,\delta)\bigl[\omega(1,f) + \|f\|_{L_p(T^N)}\bigr],$$

где константа $C_5(p,\delta)$ не зависит от функции f.

Лемма доказана.

§ 2. О справедливости СОЛ для кратных рядов Фурье функций из класса H^ω, $\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$

Доказательство теоремы. Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное измеримое подмножество T^N, $N \geqslant 3$, $\mu\mathfrak{A} > 0$ ($\mu = \mu_N$ – N-мерная мера Лебега), и пусть $f(x) = 0$ на множестве $\mathfrak{A}$.

Пусть множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_3(W_3^0)$. Следовательно, учитывая определение 2, существует множество $W(W_3^0)$ вида (0.6), которое вписывается п.в. в множество $\mathfrak{A}$, т.е. $\mu(W(W_3^0) \setminus \mathfrak{A}) = 0$. Так как $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, то $f(x) = 0$ п.в. на W_3.

Обозначим
$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in T^N \setminus W_3, \\ 0, & x \in W_3. \end{cases} \tag{2.1}$$

Очевидно, что функцию $f_1(x)$ можно считать 2π-периодической по каждой из переменных.

Рассмотрим куб $\widetilde{T}^N = [-2\pi, 2\pi]^N$. Определим по аналогии с множеством W_3 (см. (0.4)–(0.6)) множество $\widetilde{W}_3 \subset \widetilde{T}^N$. Для этого определим (аналогично (0.4)) множества
$$\widetilde{W}_{J_3} = \Omega_{J_3} \times \widetilde{T}^{N-3}_{M\setminus J_3}, \qquad J_3 \subset M, \tag{2.2}$$

где $\Omega_{J_3} \subset T^3_{J_3}$ – открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^3_J$, $J = J_3 \subset M$, фигурировавшее при построении множества W_{J_3}, и положим (аналогично (0.6))
$$\widetilde{W}_3 = \bigcup_{J_3\subset M} \widetilde{W}_{J_3}. \tag{2.3}$$

Очевидно (учитывая построение множеств W_3 и $\widetilde{W}_3$), справедливы следующие вложения
$$W_3 \subset \widetilde{W}_3 \quad \text{и} \quad W_3^0 \subseteq \bigcap_{J_3\subset M} \widetilde{W}_{J_3}. \tag{2.4}$$

Далее, так как $f_1(x) = 0$ на $W_3 \subset T^N$, то в силу 2π-периодичности функции $f_1(x)$ по каждой из переменных имеем
$$f_1(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \widetilde{W}_3. \tag{2.5}$$

Для дальнейшего доказательства нам потребуется (см., например, [14]) следующая

Теорема (Уитни). *Пусть дано произвольное непустое замкнутое множество $P \subset \mathbb{R}^N$. Тогда существует такой набор кубов $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} = \{Q_1, \dots, Q_m, \dots\}$, что выполнены следующие условия*:

1) $\bigcup\limits_m Q_m = \Omega = \mathbb{R}^N \setminus P$; (2.6)
2) *все Q_m попарно не пересекаются*;
3) $\operatorname{diam}(Q_m) \leqslant \operatorname{dist}(Q_m, P) \leqslant 4 \operatorname{diam}(Q_m)$ (2.7)

(под кубом понимается замкнутый куб в $\mathbb{R}^N$ с ребрами, параллельными координатным осям; два таких куба называются *непересекающимися*, если не пересекаются их внутренности).

Рассмотрим открытое множество W_3^0 в качестве открытого множества Ω, фигурирующего в теореме Уитни, а множество $T^N \setminus W_3^0$ – в качестве замкнутого множества P. Тогда вместо условия (2.6) имеем:

$$W_3^0 = \bigcup_m Q_m. \tag{2.8}$$

Рассмотрим произвольный куб Q_{m_0} из объединения (2.8). Обозначим

$$\delta^0 = \operatorname{diam}(Q_{m_0}).$$

Учитывая (2.7), получим для этого куба оценку:

$$\delta^0 \leqslant \operatorname{dist}(Q_{m_0}, T^N \setminus W_3^0) \leqslant 4\delta^0.$$

Элементы множества $\{x\}$, где $x = (x_1, \dots, x_N) \in Q_{m_0}$, обладают следующими свойствами:

1) $x + u = (x_1 + u_1, \dots, x_N + u_N) \in W_3^0$, если $|u_j| \leqslant \delta^0, j = 1, \dots, N$; (2.9)
2) для любых
$y_1, \dots, y_{j_1-1}, y_{j_1+1}, \dots, y_{j_2-1}, y_{j_2+1}, \dots, y_{j_3-1}, y_{j_3+1}, \dots, y_N \in [-2\pi, 2\pi]$
имеем

$$\begin{aligned}(y_1, \dots, y_{j_1-1}, x_{j_1} + u_{j_1}, y_{j_1+1}, \dots, y_{j_2-1}, x_{j_2} + u_{j_2},&\\ y_{j_2+1}, \dots, y_{j_3-1}, x_{j_3} + u_{j_3}, y_{j_3+1}, \dots, y_N) \in \widetilde{W}_{J_3},&\end{aligned} \tag{2.10}$$

если $(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}) \in \Omega_{J_3} \cap \widetilde{Q}_{m_0}$ и $|u_{j_1}|, |u_{j_2}|, |u_{j_3}| \leqslant \delta^0$, $J_3 \subset M$, где $\widetilde{Q}_{m_0}$ – ортогональная проекция куба Q_{m_0} на пространство $\mathbb{R}^3_J$, а Ω_{J_3} – открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^3_J$, $J = J_3 \subset M$ (в силу определения множеств $\widetilde{W}_3$ и $\widetilde{W}_{J_3}$, см. (2.3), (2.2)).

Рассмотрим частичную сумму $S_n(x; f)$. Учитывая лемму (оценки (1.3)–(1.5)) для любого вектора $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N) \in \mathbb{R}^N$, $0 < \delta_j \leqslant \pi$, $j = 1, \dots, N$, имеем:

$$S_n(x; f) = J_n(\delta, x, f) + \alpha_n(\delta, x, f). \tag{2.11}$$

где $J_n(\delta, x, f)$ определено в (1.4), а мажоранта $\alpha_n(\delta, x, f)$ удовлетворяет условию (1.5). Учитывая, в свою очередь, определение функций $f_1(x)$ (см. (2.1)), определение интегралов, входящих в $J_n(\delta, x, f)$, равенство (2.11) можно переписать так

$$S_n(x; f) = J_n(\delta, x, f_1) + \alpha_n(\delta, x, f). \tag{2.12}$$

Оценим каждое из слагаемых в (2.12). Начнем с первого.

Предложение 1. *Пусть $x \in Q_{m_0}$, тогда существует вектор $\delta \in \mathbb{R}^N$ с положительными координатами $\delta_j = \delta^0 = \operatorname{diam}(Q_{m_0})$, $j = 1, \dots, N$, такой, что*

$$J_n(\delta, x, f_1) = 0. \tag{2.13}$$

Доказательство предложения 1. Рассмотрим $J_n(\delta, x, f_1)$. Учитывая определение (2.1) функции $f_1(x)$, а также равенства (1.4) и (1.8), можем расписать $J_n(\delta, x, f_1)$ следующим образом:

$$J_n(\delta, x, f_1) = \sum_{\substack{0 \leqslant r, l \leqslant N \\ 3 \leqslant \nu \leqslant N \\ r + \nu + l = N}} B_n^{(r,\nu,l)}(\delta, x, f_1). \tag{2.14}$$

Докажем, что все слагаемые в сумме (2.14) равны нулю при $x \in Q_{m_0}$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N) \in \mathbb{R}^N$, $\delta_j = \delta^0$, $j = 1, \dots, N$. Зафиксируем произвольные r_0, ν_0, l_0: $0 \leqslant r_0, l_0 \leqslant N$, $3 \leqslant \nu_0 \leqslant N$, $r_0 + \nu_0 + l_0 = N$, и рассмотрим $B_n^{(r_0,\nu_0,l_0)}(\delta, x, f_1)$. В силу (1.7)

$$B_n^{(r_0,\nu_0,l_0)}(\delta, x, f_1) = \sum_{k \in \Delta(r_0,\nu_0,l_0)} A_n^{(r_0,\nu_0,l_0)}(k; \delta, x, f_1), \tag{2.15}$$

где множество $\Delta(r_0, \nu_0, l_0)$ было определено в (1.2).

Покажем, что все слагаемые в сумме (2.15) равны нулю при $x \in Q_{m_0}$ и $\delta \in \mathbb{R}^N$, $\delta_j = \delta^0$, $j = 1, \dots, N$. Рассмотрим в сумме (2.15) произвольное слагаемое $A_n^{(r_0,\nu_0,l_0)}(k; \delta, x, f_1)$ при $x \in Q_{m_0}$ и $\delta \in \mathbb{R}^N$, $\delta_j = \delta^0$, $j = 1, \dots, N$. В силу (1.6) имеем

$$A_n^{(r_0,\nu_0,l_0)}(k; \delta, x, f_1) = \frac{1}{\pi^N} \int_{\delta_0}^{\pi} \cdots \int_{\delta_0}^{\pi} \left(\int_{-\delta_0}^{\delta^0} \cdots \int_{-\delta_0}^{\delta^0} \left\{ \int_{-\pi}^{-\delta^0} \cdots \int_{-\pi}^{-\delta^0} f_1(x + u) \right.\right.$$
$$\left.\left. \times D_n(u)\, du_{k_1} \dots du_{k_{r_0}} \right\} du_{k_{r_0+1}} \dots du_{k_{r_0+\nu_0}} \right) du_{k_{r_0+\nu_0+1}} \dots du_{k_{r_0+\nu_0+l_0}},$$

где $k = (k_1, \dots, k_N) \in \Delta(r_0, \nu_0, l_0)$ (см. (1.2)).

Рассмотрим вектор $u = (u_1, \dots, u_N) \in T^N$ с координатами, удовлетворяющими следующим условиям:

$$\begin{aligned} -\pi \leqslant u_j \leqslant -\delta^0 \quad & \text{при} \quad j = k_1, \dots, k_{r_0}; \\ -\delta^0 \leqslant u_j \leqslant \delta^0 \quad & \text{при} \quad j = k_{r_0+1}, \dots, k_{r_0+\nu_0}; \\ \delta^0 \leqslant u_j \leqslant \pi \quad & \text{при} \quad j = k_{r_0+\nu_0+1}, \dots, k_{r_0+\nu_0+l_0}; \end{aligned} \tag{2.16}$$

$0 \leqslant r_0, l_0 \leqslant N$, $3 \leqslant \nu_0 \leqslant N$, $r_0 + \nu_0 + l_0 = N$. Если $\nu_0 \geqslant 3$, а $x \in Q_{m_0}$, то в силу свойства (2.10) существует множество $\widetilde{W}_{J_3}$, $J_3 \subset M$ (см. (2.3)), такое, что

$$x + u = (x_1 + u_1, \dots, x_N + u_N) \in \widetilde{W}_{J_3}. \tag{2.17}$$

Действительно, если $\nu_0 \geqslant 3$, то вектор u в (2.16) имеет (по крайней мере) три компоненты u_{j_1}, u_{j_2} и u_{j_3} с номерами j_1, j_2, j_3: $k_{r_0+1} \leqslant j_1 < j_2 < j_3 \leqslant k_{r_0+\nu_0}$, такие, что $|u_{j_1}|, |u_{j_2}|, |u_{j_3}| \leqslant \delta^0$; с другой стороны, так как $x \in Q_{m_0}$, то компоненты вектора x с номерами j_1, j_2 и j_3 удовлетворяют следующему условию: $(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}) \in \Omega_{J_3} \cap \widetilde{Q}_{m_0}$ (где $\widetilde{Q}_{m_0}$ – ортогональная проекция куба Q_{m_0} на пространство $\mathbb{R}^3_J$, $J = J_3 \subset M$), следовательно, в силу (2.10) получаем (2.17).

В таком случае, так как $f_1(y) = 0$ на $\widetilde{W}_{J_3}$ при $J_3 \subset M$ (в силу (2.5)), то из (2.17) получаем, что если $x \in Q_{m_0}$, а вектор u удовлетворяет условию (2.16), где $\nu_0 \geqslant 3$, то $f_1(x + u) = 0$, и, следовательно,

$$A_n^{(r_0,\nu_0,l_0)}(k; \delta, x, f_1) = 0. \tag{2.18}$$

Таким образом, из (2.18) и (2.15) следует, что при $x \in Q_{m_0}$ и $\delta \in \mathbb{R}^N$, $\delta_j = \delta^0$, $j = 1, \dots, N$, $B_n^{(r_0,\nu_0,l_0)}(\delta, x, f_1) = 0$, а в таком случае в силу (2.14) и в силу произвольности выбора чисел r_0, ν_0, l_0 $(0 \leqslant r_0, l_0 \leqslant N, 3 \leqslant \nu_0 \leqslant N, r_0 + \nu_0 + l_0 = N)$ при тех же предположениях на x и δ получаем

$$J_n(\delta, x, f_1) = 0, \qquad x \in Q_{m_0}, \quad \delta = (\delta_1, \dots, \delta_N), \quad \delta_j = \delta^0, \quad j = 1, \dots, N.$$

что доказывает предложение 1.

Теперь рассмотрим $\alpha_n(\delta, x, f)$, удовлетворяющее условию (1.5).

Предложение 2. *Для любого вектора* $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N) \in \mathbb{R}^N$, $0 < \delta_j \leqslant \pi$, $j = 1, \dots, N$,

$$\alpha_n(\delta, x, f) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty \quad \textit{п.в. на} \quad T^N.$$

Доказательство предложения 2. Рассмотрим произвольную функцию $f(x) \in H^{\omega}(T^N)$, $\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$ (см. (0.8)), и зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем тригонометрический полином $P_m(x)$ так, что

$$\|f - P_m\|_{\mathbb{C}(T^N)} < \varepsilon. \tag{2.19}$$

Так как

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\alpha_n(\delta, x, f)| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} |\alpha_n(\delta, x, f - P_m)| + \overline{\lim_{n\to\infty}} |\alpha_n(\delta, x, P_m)|,$$

а $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(\delta, x, P_m) = 0$ для п.в. $x \in T^N$, то, учитывая оценку (1.5) из леммы и то, что $\omega(1, f) \leqslant 2\|f\|_{\mathbb{C}(T^N)}$, получаем следующее: существует номер $\theta = \theta(f - P_m) \in \mathbb{Z}^1_{16}$ такой, что

$$\begin{aligned}\Big\|\overline{\lim_{n\to\infty}} |\alpha_n(\delta, x, f)|\Big\|_{L_p(T^N)} &\leqslant \Big\|\sup_{n\in\mathbb{Z}^N_\theta} |\alpha_n(\delta, x, f - P_m)|\Big\|_{L_p(T^N)} \\ &\leqslant C(p,\delta)\big[\omega(1, f - P_m) + \|f - P_m\|_{L_p(T^N)}\big] \\ &\leqslant C_1(p,\delta)\|f - P_m\|_{\mathbb{C}(T^N)}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Таким образом, из (2.19) и (2.20) следует, что $\alpha_n(\delta, x, f) \to 0$ при $n \to \infty$ п.в. на T^N. Предложение 2 доказано.

Рассмотрим произвольный куб Q_m из (2.8). Пусть $\delta \in \mathbb{R}^N$, где $\delta_j = \mathrm{diam}(Q_m)$, $j = 1, \ldots, N$. Используя разложение (2.12) частичной суммы $S_n(x; f)$ для этого δ, в силу предложений 1 и 2 получаем:

$$S_n(x; f) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in Q_m. \tag{2.21}$$

А так как соотношение (2.21) выполняется для любого куба Q_m в множестве W^0_3, то оно справедливо и для п.в. $x \in W^0_3$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x; f) = 0 \quad \text{п.в. на} \quad W^0_3.$$

Таким образом, на множестве $\mathfrak{A}$, обладающем свойством $\mathbb{B}_3(W^0_3)$, справедлива СОЛ п.в. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Tonelli L. Serie trigonometriche. Bologna, 1928.

[2] Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений // УМН. 1976. Т. 31. №6. С. 28–83.

[3] Блошанский И. Л. Обобщенная локализация почти всюду и сходимость двойных рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242. №1. С. 11–13.

[4] Блошанский И. Л. О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье // Матем. заметки. 1975. Т. 18. №2. С. 153–168.

[5] Блошанский И. Л. Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа // Автореферат дис. ... докт. физ.-матем. наук. М.: МИАН, 1991.

[6] Блошанский И. Л. О сходимости и локализации кратных рядов и интегралов Фурье // Автореферат дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1978.

[7] Осколков К. И. Оценка скорости приближения непрерывной функции и ее сопряженной суммами Фурье на множестве полной меры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. №6. С. 1373–1407.

[8] Блошанский И. Л. О критериях слабой обобщенной локализации в N-мерном пространстве // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. №6. С. 1294–1298.

[9] Блошанский И. Л. О геометрии множеств в N-мерном пространстве, на которых справедлива обобщенная локализация для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из $L_p, p > 1$ // Матем. сб. 1983. Т. 121. №1. С. 87–110.

[10] Блошанский И. Л. Два критерия слабой обобщенной локализации для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из $L_p, p \geqslant 1$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. №2. С. 243–282.

[11] Блошанский И. Л. Структура и геометрия максимальных множеств сходимости и неограниченной расходимости почти всюду кратных рядов Фурье функций из L_1, равных нулю на заданном множестве // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. №4. С. 675–707.

[12] Бахбух М., Никишин Е. М. О сходимости двойных рядов Фурье от непрерывных функций // Сиб. матем. журн. 1973. Т. 14. №6. С. 1189–1199.

[13] Hunt R. A. On the convergence of Fourier series. Ortogonal Expansions and their Continuous Analogues // Proc. Conf. Southern Illinois, Univ. Edwardsville, 1967. Carbondale Ill: Southern Illinois Univ. Press, 1968. P. 235–255.

[14] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

Московский педагогический университет;
Московский государственный строительный университет

Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. С. 57–68

Мультипликативные оценки L_1-нормы экспоненциальных сумм

С. В. Бочкарев

Настоящая статья является продолжением работ автора [1]–[8], посвященных нижним мультипликативным оценкам L_1-нормы и их приложениям. Она содержит оценки L_1-нормы экспоненциальных сумм и дает обоснование результатов, анонсированных в работе [8].

Библиография: 14 названий.

Мультипликативные нижние оценки L_1-нормы для диадического мартингала (системы Хаара) были установлены автором в начале 70-х годов и применены для усреднения по случайным сингулярным функциям канторова типа при решении проблемы Зигмунда об абсолютной сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации в случае общих ортонормированных систем [1]–[3]. Обозначим через $\delta_n(x)$ пачку с номером n ряда по системе Хаара, т.е.

$$\delta_0(x) = a_1\chi_1(x),$$
$$\delta_n(x) = \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k\chi_k(x), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

где $\{a_k\}$ – последовательность вещественных чисел.

Теорема 1 [6; с. 49]. *Пусть $\{R_m\}_{m=0}^{\infty}$ – последовательность возрастающих целых чисел, $R_0 = -1$, и $\{q_m\}_{m=0}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел, $q_0 = 1$, такая, что*

$$\frac{q_{m+1}}{q_m} \geqslant \alpha > 1.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sup_m\left\{q_m\left\|\left(\sum_{n=R_m+1}^{R_{m+1}}\delta_n^2\right)^{1/2}\right\|_\infty\right\}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\right\|_1 \gg \left\|\sum_{m=0}^{\infty} q_m^{1/2}\sum_{n=R_m+1}^{R_{m+1}}\delta_n\right\|_2^2. \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00212) и программы "Ведущие научные школы" (проект № 96-15-96102).

Отправным пунктом при доказательстве неравенства (1) является оценка функции распределения для функции Пэли [9]

$$\operatorname{mes}\left\{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n^2(x)\right)^{1/2} > y\right\} \ll \frac{1}{y}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\right\|_1, \tag{2}$$

на основании которой доказывается неравенство (1) в частном случае, когда имеется только один блок $\sum\limits_{n=R_m+1}^{R_{m+1}}\delta_n(x)$. Заметим, что просуммировать по m установленные для отдельных блоков неравенства нельзя, так как в правой части неравенства (1) все слагаемые положительны, а в левой части под знаком нормы L_1 происходит интерференция. Для преодоления указанной трудности была разработана специальная конструкция, использующая технику моментов остановки.

Другой предельный случай неравенства (1), когда $q_m = 2^m$, а $R_m = m$, т.е. каждый блок состоит только из одной пачки, дает важное числовое неравенство, применением которого поточечно и интегрированием была установлена нижняя оценка средних арифметических от L_1-нормы частных сумм общих ортогональных рядов [4]–[6].

Теорема 2. *Пусть $\{f_n\}$ – ортонормированная на отрезке $[0,1]$ система функций и $\{a_n\}$ – последовательность вещественных чисел. Тогда для любого $N=1,2,\dots$ справедливо неравенство*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|a_kf_k\|_\infty\sum_{n=1}^{N}\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}a_kf_k(x)\right|dx \gg \log N\sum_{n=1}^{N}a_n^2\left(1-\frac{n}{N+1}\right). \tag{3}$$

Теорема 2 дает следующую оценку L_1-норм экспоненциальных сумм с произвольным спектром.

Теорема 3. *Пусть $\{n_k\}$ – последовательность возрастающих целых чисел. Тогда для любого $N=1,2,\dots$ имеет место оценка*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}|d_k|\sum_{m=1}^{N}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{m}d_ke^{in_kx}\right|dx \gg \log N\sum_{n=1}^{N}|d_n|^2\left(1-\frac{n}{N+1}\right), \tag{4}$$

где d_k – любые комплексные числа.

Отметим некоторые частные случаи неравенства (4). Если $|d_k| = (\log k)^\alpha$, $\alpha\geqslant 0$, то получаем оценку

$$\sum_{m=1}^{N}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{m}d_ke^{in_kx}\right|dx \gg N(\log N)^{1+\alpha},$$

и такая же оценка следует из обобщенного неравенства Харди

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{N} d_k e^{in_k x}\right| dx \gg \sum_{k=1}^{N}\frac{|d_k|}{k}, \tag{5}$$

установленного С. В. Конягиным [10] и О. Мак-Ги, Л. Пиньо, Б. Смитом [11].

Если $|d_k| = k^\alpha$, $\alpha > 0$, то обобщенное неравенство Харди (5) дает только тривиальную оценку с правой частью, равной $N^{1+\alpha}$, а неравенство (4) дает точную оценку

$$\sum_{m=1}^{N}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{m} d_k e^{in_k x}\right| dx \gg N^{1+\alpha}\log N,$$

которая достигается, если спектр сплошной и $d_k = k^\alpha$.

В последнее время автор установил, что мультипликативные неравенства типа неравенства (1) в тригонометрическом варианте могут быть использованы для оценки L_1-нормы индивидуальных экспоненциальных сумм. Предложенный в [7], [8] метод получения нижних оценок L_1-нормы экспоненциальных сумм основывается на характеризации пространств BMO и Харди через разложения Валле Пуссена.

Пусть $\{V_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ядра Валле Пуссена, т.е. (см. [12; т. 1, с. 190])

$$V_n(x) = 2K_{2n-1}(x) - K_{n-1}(x), \tag{6}$$

где $K_n(x)$ – ядра Фейера.

Обозначим $Q_0(x) = V_1(x)$, а при $n \geqslant 1$

$$Q_n(x) = V_{2^n}(x) - V_{2^{n-1}}(x). \tag{7}$$

Пусть $T^m = [0, 2\pi)^m$ – куб в $\mathbb{R}^m$, $m = 1, 2, \ldots$; $x = (x_1, \ldots, x_m)$ – вектор; $n = (n_1, \ldots, n_m)$ – мультииндекс; $I = I_1 \times \cdots \times I_m$ – прямое произведение отрезков таких, что $\max\limits_{k\leqslant m}|I_k| \leqslant 2\pi$.

Через $L_1(T^m)$ обозначим лебегово пространство функций 2π-периодических на каждой из переменных x_k, $1 \leqslant k \leqslant m$. Для $f \in L_1(T^m)$ определим норму в пространстве BMO

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\mathbb{R}}} = \|f\|_{L_1(T^m)} + \sup_I \int_I |f(x) - f_I|\, dx,$$

где f_I – среднее значение функции f на прямоугольнике I.

Используя разложение Валле Пуссена, введем новую норму $\|f\|_*$:

$$\|f\|_* = \sup_I \frac{1}{|I|}\sum\nolimits^* \int_I\left(\int_{T^m} f(u_1, \ldots, u_m) Q_{n_1}(x_1 - u_1)\cdots Q_{n_m}(x_m - u_m)\, du\right)^2 dx,$$

где

$$\sum\nolimits^* = \sum_{2^{n_1}|I_1|\geqslant 1}\cdots\sum_{2^{n_m}|I_m|\geqslant 1}.$$

Следующая теорема устанавливает эквивалентность $\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\mathbb{R}}}$ и безусловной (т.е. не меняющейся при произвольной расстановке знаков в разложении Валле Пуссена) нормы $\|f\|_*$.

Теорема 4. 1) *Пусть* $f \in \mathrm{BMO}_{\mathbb{R}}$. *Тогда*

$$\|f\|_* \ll \|f\|_{\mathrm{BMO}_{\mathbb{R}}}.$$

2) *Пусть* $\|f\|_* < \infty$. *Тогда* $f \in \mathrm{BMO}_{\mathbb{R}}$ *и*

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\mathbb{R}}} \ll \|f\|_*.$$

При $m = 1$ теорема 4, дающая новую характеризацию пространства BMO на окружности, установлена в работе [7].

Пусть теперь D^m – открытый m-мерный единичный диск в $\mathbb{C}^m$. Для функции $f(z) = f(z_1, \dots, z_m)$, регулярной в D^m, т.е. представимой в D^m абсолютно сходящимся степенным рядом, норма $f(z)$ в пространстве Харди $H^p(D^m)$, $p > 0$, определяется следующим образом (см. [12; т. 2, с. 475–476]):

$$\|f\|_{H^p(D^m)} = \sup_{r_1<1,\dots,r_m<1} \left(\int_{T^m} |f(r_1 e^{ix_1}, \dots, r_m e^{ix_m})|^p \, dx_1 \cdots dx_m \right)^{1/p}.$$

Если $f \in H^p(D^m)$, то (см. [13; с. 50–52]) для почти всех $x \in T^m$ существует $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{ix}) = f^*(e^{ix})$ и выполняется равенство

$$\|f\|_{H^p(D^m)} = \|f^*\|_{L_p(T^m)}.$$

Для $f \in H^p(D^m)$ разложением Валле Пуссена назовем ряд, членами которого являются полиномы

$$\Delta_n(f^*, x) = \int_{T^m} f^*(e^{iu_1}, \dots, e^{iu_m}) Q_{n_1}(x_1 - u_1) \cdots Q_{n_m}(x_m - u_m) \, du_1 \cdots du_m. \tag{8}$$

Теорема 5. *Пусть* $f \in H^p(D^m)$, $m = 1, 2, \dots$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\left\| \left(\sum_n |\Delta_n(f^*)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_1(T^m)} \ll \|f^*\|_{L_1(T^m)} \ll \left\| \left(\sum_n |\Delta_n(f^*)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_1(T^m)}. \tag{9}$$

Теорема 5 выводится из установленной в теореме 4 характеризации пространства BMO через разложение Валле Пуссена.

Докажем теорему, которая устанавливает мультипликативную нижнюю оценку общей экспоненциальной суммы, выраженную через убывающий мультипликатор.

Рассмотрим экспоненциальную сумму

$$S_N^*(e^{ix}) = \sum_{n=1}^{2^N} c_n e^{inx}, \tag{10}$$

являющуюся граничными значениями полинома

$$S_N(z) = \sum_{n=1}^{2^N} c_n z^n$$

с произвольными комплексными коэффициентами $\{c_n\}$, $c_n = 0$ при $n > 2^N$. Обозначим $\delta_0(x) = c_1 e^{ix}$, и если $n \geqslant 1$, то

$$\delta_n(x) = \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} c_k e^{ikx}. \tag{11}$$

Теорема 6. *Для любой последовательности положительных вещественных чисел $\{\mu_n\}$, удовлетворяющей при некотором $A \geqslant 1$ условию*

$$\mu_{n+1} \leqslant \mu_n \leqslant A\mu_{n+1}, \qquad n = 0, 1, \dots, N-1, \tag{12}$$

справедливо неравенство

$$\max_{n \leqslant N} \left(\mu_n \sum_{m=0}^{n} \mu_m \|\delta_m\|_\infty^2\right)^{1/2} \int_0^{2\pi} \left|\sum_{n=1}^{2^N} c_n e^{inx}\right| dx \\ \gg A^{-1} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{N} \mu_n |\delta_n(x)|^2\, dx. \tag{13}$$

Доказательство. В силу неравенства (9), примененного к полиному $S_N(z)$, имеем

$$\int_0^{2\pi} \left|\sum_{n=1}^{2^N} c_n e^{inx}\right| dx \gg \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{N} |\Delta_n(S_N^*, x)|^2\right)^{1/2} dx. \tag{14}$$

Вместе с тем из (6)–(8) и (10), (11) следует, что

$$\|\Delta_n(S_N^*)\|_\infty = \|\Delta_n(\delta_n + \delta_{n+1})\|_\infty \ll \|Q_n\|_1 \left(\|\delta_n\|_\infty + \|\delta_{n+1}\|_\infty\right) \\ \ll \|\delta_n\|_\infty + \|\delta_{n+1}\|_\infty. \tag{15}$$

Используя (15), получаем, что для любого $x \in [0, 2\pi)$

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \mu_n |\Delta_n(S_N^*, x)|^2\right)^2 \\ \leqslant 2 \sum_{n=0}^{N} \mu_n |\Delta_n(S_N^*, x)|^2 \sum_{m=0}^{n} \mu_m |\Delta_m(S_N^*, x)|^2 \\ \ll \sum_{n=0}^{N} \mu_n |\Delta_n(S_N^*, x)|^2 \sum_{m=0}^{n} \mu_m \left(\|\delta_m\|_\infty^2 + \|\delta_{m+1}\|_\infty^2\right). \tag{16}$$

Далее, применяя второе из неравенств (12), имеем при $n \leqslant N-1$

$$\begin{aligned}
\mu_n \sum_{m=0}^{n} \mu_m \left(\|\delta_m\|_\infty^2 + \|\delta_{m+1}\|_\infty^2\right) \\
\leqslant \mu_n \left(\sum_{m=0}^{n} \mu_m \|\delta_m\|_\infty^2 + A \sum_{m=0}^{n} \mu_{m+1} \|\delta_{m+1}\|_\infty^2 \right) \\
\leqslant (1+A)\mu_n \sum_{m=0}^{n+1} \mu_m \|\delta_m\|_\infty^2 \leqslant 2A^2 \mu_{n+1} \sum_{m=0}^{n+1} \mu_m \|\delta_m\|_\infty^2. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Таким образом (см. (11), (16), (17)), для любого $x \in [0, 2\pi)$

$$\sum_{n=0}^{N} \mu_n |\Delta_n(S_N^*, x)|^2 \ll A \max_{n \leqslant N} \left(\mu_n \sum_{m=0}^{n} \mu_m \|\delta_m\|_\infty^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N} |\Delta_n(S_N^*, x)|^2 \right)^{1/2},$$

и, следовательно (см. (14)),

$$A \max_{n \leqslant N} \left(\mu_n \sum_{m=0}^{n} \mu_m \|\delta_m\|_\infty^2 \right)^{1/2} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=1}^{2^N} c_n e^{inx} \right| dx \gg \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{N} \mu_n |\Delta_n(S_N^*, x)|^2 \, dx. \qquad (18)$$

Так как (см. (6)–(8), (11)) при $n \geqslant 1$

$$\int_0^{2\pi} |\delta_n(x)|^2 \, dx \leqslant \int_0^{2\pi} |\Delta_{n-1}(S_N^*, x) + \Delta_n(S_N^*, x)|^2 \, dx,$$

то (см. (12))

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{N} \mu_n |\delta_n(x)|^2 \, dx \leqslant 4 \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{N} \mu_n |\Delta_n(S_N^*, x)|^2 \, dx. \qquad (19)$$

Объединяя (18) и (19), получаем (13). Теорема доказана.

Замечание 1. Следует отметить, что теорема 6 теряет силу в мартингальном или вещественном тригонометрическом случаях, поскольку она основывается на неравенстве (9), которое в этих случаях не имеет места. Действительно, возьмем в качестве вещественного тригонометрического полинома ядро Валле Пуссена $V_{2^N-1}(x)$. Тогда (см. (6)) при $\mu_n = 2^{-n}$ получаем

$$\|V_{2^N-1}\|_1 \ll 1, \qquad \max_{n \leqslant N} \mu_n \cdot \sum_{m=0}^{n} \mu_m \|\delta_m\|_\infty^2 \ll 1,$$

но

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{N} \mu_n |\delta_n(x)|^2 \, dx \gg N,$$

и, следовательно, неравенство (13) не выполняется.

Для возрастающего мультипликатора также имеет место мультипликативная нижняя оценка L_1-нормы.

Теорема 7. *Пусть* $f(z) \in H^1(D)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{20}$$

и пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\delta_n\|_\infty^2 < \infty. \tag{21}$$

Тогда для любой последовательности вещественных чисел $\{\mu_n\}$, *удовлетворяющей при некотором* $A \geqslant 1$ *условию*

$$\mu_n \leqslant \mu_{n+1} \leqslant A\mu_n, \qquad n = 0, 1, \dots, \tag{22}$$

справедливо неравенство

$$\sup_n \left(\mu_n \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m \|\delta_m\|_\infty^2\right)^{1/2} \int_0^{2\pi} \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}\right| dx \gg A^{-1} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n |\delta_n(x)|^2 \, dx. \tag{23}$$

Доказательство. Так же как при доказательстве соотношения (15) получаем, что (см. (8), (11), (20))

$$\|\Delta_n(f^*)\|_\infty \ll \|\delta_n\|_\infty + \|\delta_{n+1}\|_\infty. \tag{24}$$

Для любого $x \in [0, 2\pi)$ имеет место неравенство (см. (24))

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n |\Delta_n(f^*, x)|^2\right)^{1/2} \\ &\qquad \leqslant 2 \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n |\Delta_n(f^*, x)|^2 \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m |\Delta_m(f^*, x)|^2 \\ &\qquad \ll \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n |\Delta_n(f^*, x)|^2 \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m \left(\|\delta_m\|_\infty^2 + \|\delta_{m+1}\|_\infty^2\right). \end{aligned} \tag{25}$$

Используя первое из неравенств (22), получаем

$$\begin{aligned} &\mu_n \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m \left(\|\delta_m\|_\infty^2 + \|\delta_{m+1}\|_\infty^2\right) \; . \\ &\qquad \leqslant \mu_n \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m \|\delta_m\|_\infty^2 + \mu_n \sum_{m=n}^{\infty} \mu_{m+1} \|\delta_{m+1}\|_\infty^2 \\ &\qquad \leqslant 2\mu_n \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m \|\delta_m\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Поэтому из неравенства (25) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n |\Delta_n(f^*, x)|^2 \ll \sup_n \left(\mu_n \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m \|\delta_m\|_\infty^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n(f^*, x)|^2 \right)^{1/2}. \quad (26)$$

При $n \geqslant 1$ из второго неравенства (22) получаем (см. (8), (11), (20))

$$\begin{aligned} \mu_n \int_0^{2\pi} |\delta_n(x)|^2\,dx & \\ &\leqslant 2\mu_n \int_0^{2\pi} \left(|\Delta_{n-1}(f^*, x)|^2 + |\Delta_n(f^*, x)|^2 \right) dx \\ &\leqslant 2A \left(\int_0^{2\pi} \mu_{n-1} |\Delta_{n-1}(f^*, x)|^2\,dx + \int_0^{2\pi} \mu_n |\Delta_n(f^*, x)|^2\,dx \right). \quad (27) \end{aligned}$$

Применяя неравенство (9) и используя (26), (27), имеем

$$\begin{aligned} \sup_n \left(\mu_n \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m \|\delta_m\|_\infty^2 \right)^{1/2} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} \right| dx & \\ &\gg \sup_n \left(\mu_n \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m \|\delta_m\|_\infty^2 \right)^{1/2} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n(f^*, x)|^2 \right)^{1/2} dx \\ &\gg A^{-1} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n |\delta_n(x)|^2\,dx. \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (23) доказано.

Замечание 2. Теорема 7 представляет собой аналог неравенства (1) для степенных рядов. Если $\mu_n = 1$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то, как установлено в работе [7], теорема 7 сохраняет силу и для вещественных тригонометрических рядов Фурье. При этом вместо неравенства (9), которое в вещественном случае не имеет места, следует воспользоваться доказанным в [7] аналогом неравенства (2) для вещественных рядов Валле Пуссена.

Применим теперь теорему 6 для получения мультипликативных нижних оценок L_1-нормы экспоненциальной суммы, устанавливающих зависимость L_1-нормы от свойств спектра. Рассмотрим экспоненциальную сумму

$$\sum_{n=1}^{2^N} d_n e^{inx}, \quad (28)$$

где $|d_n|$ принимает значения 0 или 1.

Обозначим при $n = 1, 2, \dots, N$

$$\lambda_n = \operatorname{card}\left\{ k : 2^{n-1} < k \leqslant 2^n,\ |d_k| = 1 \right\}, \quad (29)$$

$$\Lambda_n = \operatorname{card}\left\{ k : 1 \leqslant k \leqslant 2^n,\ |d_k| = 1 \right\}. \quad (30)$$

и положим $\lambda_0 = d_1$.

Теорема 8. *Пусть $|d_1| = 1$ и при некотором $A \geqslant 1$ выполняются соотношения*

$$\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1} \leqslant A\lambda_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{31}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\max_{n\leqslant N}\left(\frac{\Lambda_n}{\lambda_n}\right)^{1/2}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=1}^{2^N} d_n e^{inx}\right| dx \gg A^{-1}\cdot N. \tag{32}$$

Доказательство. Возьмем в качестве последовательности чисел, образующих мультипликатор $\{\mu_n\}$, числа $\mu_n = 1/\lambda_n$. Из (31) следует, что условие (12) выполнено. В силу неравенства (13) имеем

$$\max_{n\leqslant N}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{\lambda_m}\|\delta_m\|_\infty^2\right)^{1/2}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=1}^{2^N} d_n e^{inx}\right| dx$$
$$\gg A^{-1}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{\lambda_n}|\delta_n(x)|^2\,dx. \tag{33}$$

Учитывая (см. (28), (29)), что $\|\delta_m\|_\infty \leqslant \lambda_m$, получаем

$$\max_{n\leqslant N}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{\lambda_m}\|\delta_m\|_\infty^2\right)^{1/2} \leqslant \max_{n\leqslant N}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{m=0}^{n}\lambda_n\right)^{1/2} = \max_{n\leqslant N}\left(\frac{\Lambda_n}{\lambda_n}\right)^{1/2}. \tag{34}$$

Вместе с тем из (28), (29) следует, что

$$\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{\lambda_n}|\delta_n(x)|^2\,dx = N+1. \tag{35}$$

Объединяя соотношения (33)–(35), получаем неравенство (32). Теорема доказана.

Замечание 3. Теорема 8 дает точную оценку в двух предельных случаях, когда спектр сплошной и спектр лакунарный.

В качестве примера применения теоремы 8 возьмем экспоненциальную сумму со спектром, который задается функцией $\varphi(u) = [2^{(\log n)^\beta}]$, где $[\,\cdot\,]$ – целая часть, $\log$ означает двоичный логарифм и $\beta \geqslant 1$.

Теорема 9. *Для любого $\beta \geqslant 1$ при всех коэффициентах d_n таких, что $|d_n| = 1$, справедливо неравенство*

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=1}^{N} d_n \exp\bigl(i[2^{(\log n)^\beta}]x\bigr)\right| dx \geqslant C(\beta)(\log N)^{\frac{1}{2}(\beta+1)}, \tag{36}$$

где $C(\beta)$ – постоянная, зависящая только от β.

Доказательство. Получим оценки величин λ_n и Λ_n, соответствующих спектру $\varphi(n) = [2^{(\log n)^\beta}]$. Обозначим через m_n наибольшее целое число, для которого

$$[2^{(\log m_n)^\beta}] \leqslant 2^n. \tag{37}$$

Поскольку решение уравнения

$$2^{(\log x)^\beta} = 2^n \tag{38}$$

есть $x = 2^{n^{1/\beta}}$, то наибольшим целым m'_n, удовлетворяющим неравенству

$$2^{(\log m'_n)^\beta} \leqslant 2^n,$$

является число

$$m'_n = [2^{n^{1/\beta}}]. \tag{39}$$

Так как $\varphi'(x) \geqslant 1$, то m_n может принимать только одно из двух значений m'_n или $m'_n + 1$, т.е. выполняется неравенство (см. (37)–(39))

$$[2^{n^{1/\beta}}] \leqslant m_n \leqslant [2^{n^{1/\beta}}] + 1. \tag{40}$$

Отсюда, учитывая, что (см. (30), (37))

$$\Lambda_n = m_n, \tag{41}$$

получаем оценку (см. (40), (41))

$$\Lambda_n \leqslant [2^{n^{1/\beta}}] + 1. \tag{42}$$

Далее, из (29) и (40) следует, что

$$\lambda_{m+1} = m_{n+1} - m_n \geqslant 2^{(n+1)^{1/\beta}} - 2^{n^{1/\beta}} - 2. \tag{43}$$

Учитывая, что $\varphi'(x)$ возрастает, имеем

$$2^{(n+1)^{1/\beta}} - 2^{n^{1/\beta}} \geqslant \varphi'(n) = \frac{\ln 2}{\beta} 2^{n^{1/\beta}} n^{1/\beta - 1},$$

и, значит (см. (43)),

$$\lambda_{n+1} \geqslant \frac{\ln 2}{\beta} 2^{n^{1/\beta}} n^{1/\beta - 1} - 2. \tag{44}$$

Пусть M – такое целое число, что выполняются неравенства

$$2^M \leqslant 2^{(\log N)^\beta} < 2^{M+1}. \tag{45}$$

Из соотношений (29), (30), (40)–(43), (45) следует, что числа λ_k при $0 \leqslant k \leqslant M$ удовлетворяют условию (31) теоремы 8, однако, если $2^M \neq 2^{(\log N)^\beta}$, то число λ_{M+1} может не удовлетворять этому условию. Поэтому в разложении Валле Пуссена рассматриваемой экспоненциальной суммы возьмем только слагаемые до номера $M-1$. Получим (см. (14)–(17), (32)–(35))

$$\max_{n\leqslant M}\left(\frac{\Lambda_n}{\lambda_n}\right)^{1/2}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=1}^N d_n \exp\bigl(i[2^{(\log n)^\beta}]x\bigr)\right| dx \gg M. \tag{46}$$

В силу неравенств (42) и (44) имеем оценку

$$\max_{n\leqslant M}\frac{\Lambda_n}{\lambda_n} \ll \beta M^{1-1/\beta}. \tag{47}$$

Таким образом (см. (46), (47)), получаем

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=1}^N d_n \exp\bigl(i[2^{(\log n)^\beta}]x\bigr)\right| dx \gg \frac{1}{\beta}\, M^{\frac{1}{2}(1+1/\beta)}. \tag{48}$$

Но из (45) следует, что

$$M \geqslant \frac{1}{2}(\log N)^\beta. \tag{49}$$

Объединяя (48) и (49), заключаем, что справедливо неравенство (36). Теорема доказана.

Замечание 4. При $\beta = 1$ неравенство (36) является точным и может быть получено из неравенства Харди (см. [12; т. 1, с. 454]). Если $\beta > 1$, то оценка (36) не следует из обобщенного неравенства Харди [10], [11]. Неравенство (36) сохраняет силу и при произвольном перераспределении точек спектра внутри каждого двоичного интервала, когда нельзя использовать арифметические свойства спектра.

Недавно А. А. Карацуба [14] на основании некоторых новых арифметических свойств функции $\varphi(u)$ уточнил неравенство (36) для $1 < \beta < 3/2$.

Теорема (А. А. Карацуба). *Пусть* $A \geqslant 1/2$, $1 < \beta < 3/2$, $f(n) = [e^{A(\log n)^\beta}]$. *Тогда для любых коэффициентов* d_n, $|d_n| = 1$, *и* $N \geqslant N_1(\beta, A) > 0$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=1}^N d_n \exp\bigl(ixf(n)\bigr)\right| dx \geqslant \exp\bigl(2^{-15}A^{-2}(\log N)^{3-2\beta}\bigr). \tag{50}$$

Более точное знание арифметических свойств функции $\varphi(u)$ должно дать возможность усилить оценки (36), (50) и может быть достичь оценки $N^{1/2-\varepsilon}$. Заметим, однако, что, используя кусочно-линейную интерполяцию функции $\varphi(u)$ с узлами в точках m_n (см. (37)), можно построить такую функцию $\psi(u)$, принимающую целые значения в целых точках, для которой выполняются соотношения

$\psi(u) \sim \varphi(u)$, $\psi'(u) \sim \varphi'(u)$, но верхняя оценка L_1-нормы экспоненциальной суммы для $\psi(u)$ не выходит из шкалы логарифмов и близка к нижней оценке (36). Возникает вопрос о том, что дают для этой цели следующие производные и в каких терминах нужно формулировать условия, обеспечивающие требуемые арифметические свойства функции $\varphi(u)$. Для решения этого вопроса целесообразно исследовать арифметические свойства тех функций $\varphi(u)$, которые являются решениями разностных уравнений.

В заключение отметим, что предложенный метод получения мультипликативных нижних оценок L_1-нормы экспоненциальных сумм можно различными способами модифицировать и применить, используя неравенства (9) в полидиске, для оценки кратных экспоненциальных сумм. Эти вопросы предполагается рассмотреть в следующих работах.

Список литературы

[1] Бочкарев С. В. Абсолютная сходимость рядов Фурье по полным ортонормированным системам // УМН. 1972. Т. 27. №2. С. 53–76.
[2] Бочкарев С. В. О проблеме Зигмунда // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. №3. С. 630–638.
[3] Бочкарев С. В. Об абсолютной сходимости рядов Фурье по ограниченным полным ортонормированным системам функций // Матем. сб. 1974. Т. 93 (135). №2. С. 203–217.
[4] Бочкарев С. В. Логарифмический рост средних арифметических от функций Лебега ограниченных ортонормированных систем // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. №1. С. 16–19.
[5] Бочкарев С. В. Расходящийся на множестве положительной меры ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы // Матем. сб. 1975. Т. 98 (140). №3. С. 436–449.
[6] Бочкарев С. В. Метод усреднений в теории ортогональных рядов и некоторые вопросы теории базисов // Труды МИАН. 1978. Т. 146.
[7] Бочкарев С. В. Ряды Валле Пуссена в пространствах BMO, L_1 и $H^1(D)$ и мультипликативные неравенства // Труды МИАН. 1995. Т. 210. С. 41–64.
[8] Бочкарев С. В. Об одном методе оценки L_1-нормы экспоненциальной суммы // Труды МИАН. 1997. Т. 218. С. 74–76.
[9] Yano S. On a lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fourier series // Tôhoku Math. J. (2). 1959. V. 11. P. 191–215.
[10] Конягин С. В. О проблеме Литтлвуда // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. №2. С. 243–265.
[11] Mc Gehee O., Pigno L., Smith B. Hardy's inequality and the L_1 norm of exponential sums // Ann. of Math. (2). 1981. V. 113. №3. P. 613–618.
[12] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.
[13] Rudin W. Function theory in polydiscs. New York: Benjamin, 1969.
[14] Карацуба А. А. Об оценке L_1-нормы одной экспоненциальной суммы // Матем. заметки. 1998. Т. 64. №3. С. 465–468.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. С. 69–99

Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных

Б. С. Кашин, В. Н. Темляков

Введено пространство квазинепрерывных функций, изучены его аппроксимационные характеристики (ε-энтропия и поперечники), установлены неравенства для норм тригонометрических полиномов в этом пространстве. Найдены порядки ε-энтропии и поперечников некоторых классов функций малой гладкости.

Библиография: 23 названия.

§ 1. Введение

В работе изучаются асимптотические характеристики (ε-энтропия и поперечники по Колмогорову) классов функций многих переменных. Рассматриваемые классы задаются ограничением на смешанную производную или условием липшицева типа на смешанную разность. Подобные классы изучаются в теории приближения около сорока лет. Наш интерес к ним связан с важными приложениями в численном интегрировании, численных методах решения дифференциальных уравнений в частных производных (метод редких сеток – sparse grid method), вопросах сложности непрерывных алгоритмов и теории вероятностей. Другим стимулом настоящей работы послужило следующее обстоятельство. Известно, что многие задачи приближения в норме L_p указанных выше классов с ограничением на производную или разность в норме L_q в случае, когда один из параметров p или q принимает значение 1 или ∞, остаются открытыми уже в течении десятилетий. Поэтому, с одной стороны, мы сконцентрировали свое внимание на этих случаях и, с другой стороны, ввели новую норму, близкую к равномерной норме, для которой удалось продвинуться в решении задач, остающихся нерешенными в равномерной норме. Важную роль в проведенном исследовании сыграло изучение тригонометрических полиномов с гармониками из гиперболических крестов.

Приведем краткое описание полученных в работе результатов.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00094), программы "Ведущие научные школы" (проект № 96-15-96102) и фонда INTAS (проект № 93-1376).

Для любого множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ через $\mathscr{T}(\Lambda)$ будем обозначать множество тригонометрических полиномов t вида

$$t(x) = \sum_{k\in\Lambda} c_k e^{i(k,x)}, \qquad x \in \mathbb{T}^d,$$

а в случае, когда множество Λ симметрично относительно начала координат $(\Lambda = -\Lambda)$, положим

$$\mathscr{T}_r(\Lambda) = \{t(x) \in \mathscr{T}(\Lambda) : c_k = \bar{c}_{-k},\ k \in \Lambda\}.$$

Обозначим для четных n и $d \geqslant 2$

$$Y_n^d = \{s = (2l_1, \dots, 2l_d),\ l_1 + \dots + l_d = n/2,\ l \in \mathbb{Z}_+^d\}$$

и для $s \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\rho(s) := \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : [2^{s_j - 1}] \leqslant |k_j| < 2^{s_j},\ j = 1, \dots, d\}.$$

При $n = 1, 2, \dots$ положим

$$Q_n \equiv \bigcup_{\|s\|_1 \leqslant n} \rho(s), \qquad \Delta Q_{n+1} \equiv Q_{n+1} \setminus Q_n.$$

Далее, пусть μ – нормированная мера Лебега на единичной окружности. Для функции $f \in L^1(d\mu)$ с рядом Фурье

$$f \sim \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s(f, x),$$

$$\delta_0 = \int f\, d\mu, \qquad \delta_s = \sum_{2^{s-1} \leqslant |k| < 2^s} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

введем величину

$$\|f\|_{QC} \equiv \int_0^1 \left\| \sum_{s=0}^{\infty} r_s(\omega) \delta_s(f, x) \right\|_{L^\infty(d\mu)} d\omega, \tag{1.1}$$

где $\{r_k(\omega)\}_{k=0}^{\infty}$ – система Радемахера (см. [1; с. 29]). *Пространством квазинепрерывных функций* (*quasicontinuous* – отсюда обозначение $\|\cdot\|_{QC}$) назовем замыкание множества тригонометрических полиномов по норме (1.1).

Пространства квазинепрерывных функций вводятся и в многомерном случае. Это может быть сделано несколькими способами (см. подробнее § 5). Ниже рассмотрим один из вариантов: замыкание множества тригонометрических полиномов d переменных ($d = 2, 3, \dots$) по норме

$$\|f\|_{QC} \equiv \big\| \|f(\cdot, x^1)\|_{QC} \big\|_\infty, \tag{1.2}$$

где по определению для $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d$ полагаем $x^1 = (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^{d-1}$. Иными словами, в (1.2) берется QC норма по переменной x_1 и sup-норма по остальным переменным.

В работе [2] в связи с задачами теории аппроксимации было установлено следующее неравенство для тригонометрических полиномов двух переменных ($d = 2$): для любых $t_s \in \mathscr{T}(\rho(s))$

$$\Bigl\|\sum_{s\in Y_n^2} t_s\Bigr\|_\infty \geqslant A \sum_{s\in Y_n^2} \|t_s\|_1, \qquad A > 0. \tag{1.3}$$

Отметим, что сходное с (1.3) неравенство для полиномов по системе Хаара было получено ранее в [3] в связи с приложениями к теории гауссовских процессов. В. Н. Темляковым было высказано предположение, что в многомерном случае ($d \geqslant 3$) справедливо неравенство

$$\Bigl\|\sum_{s\in Y_n^d} t_s\Bigr\| \geqslant c(d)\cdot n^{-(d-2)/2}\cdot \sum_{s\in Y_n^d} \|t_s\|_1, \qquad c(d) > 0, \quad t_s \in \mathscr{T}(\rho(s)), \tag{1.4}$$

однако это открытый вопрос. В данной работе мы доказываем, что во всяком случае справедлив аналог неравенства (1.4) для введенной выше QC нормы. Более того, в § 5 мы отмечаем, что справедлив аналог (1.4) с $\|\cdot\|_\infty$ замененной на следующую, более слабую чем $\|\cdot\|_{QC}$ норму

$$\|f\|_{QC,L} \equiv \bigl\|\|f(\cdot\, x^1)\|_{QC}\bigr\|_1.$$

Рассмотрение d-мерного случая основано на одномерном неравенстве для QC нормы:

Теорема 2.1. *Для любой действительной функции $f \in L^1(d\mu)$ справедливо неравенство*

$$\|f\|_{QC} \geqslant \frac{1}{16}\sum_{s=0}^{\infty} \|\delta_s(f)\|_1.$$

Замечание 1. Из теоремы 2.1 и результата П. Г. Григорьева [4] вытекает, что

$$\sup_{t\in\mathscr{T}_r(2^k)} \frac{\|t\|_{QC}}{\|t\|_\infty} \geqslant c\sqrt{k}, \qquad c > 0, \quad \mathscr{T}_r(2^k) = \mathscr{T}_r([-2^k, 2^k]).$$

С другой стороны, из результатов о лакунарных рядах можно вывести, что

$$\sup_{t\in\mathscr{T}_r(2^k)} \frac{\|t\|_\infty}{\|t\|_{QC}} \geqslant c_1\sqrt{k}, \qquad c_1 > 0.$$

Соответствующий пример, за который авторы признательны К.И. Осколкову, приведен в конце статьи.

Неравенствам для тригонометрических полиномов посвящен § 2. В § 3 мы применяем результаты § 2 для оценки энтропийных чисел и поперечников по Колмогорову в QC норме классов функций с ограниченной производной ($W^r_{q,\alpha}$) и классов функций с ограничением на смешанную разность (H^r_q). Напомним определение этих классов.

Пусть $r > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Определим одномерное ядро Бернулли формулой

$$F_r(t,\alpha) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos\Bigl(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\Bigr), \qquad t \in (0, 2\pi),$$

и многомерное – для $x = (x_1, \dots, x_d)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ формулой

$$F_r(x,\alpha) = \prod_{j=1}^{d} F_r(x_j, \alpha_j).$$

Наконец, пусть

$$W^r_{q,\alpha} \equiv \bigl\{f : f = F_r(\,\cdot\,,\alpha) * \varphi(\,\cdot\,),\ \|\varphi\|_q \leqslant 1\bigr\},$$

где $*$ – операция свертки.

Для $r > 0$ положим $l = [r] + 1$ и рассмотрим операторы $\Delta_h^{l,j}$ взятия l-й разности с шагом h по переменной x_j. Для набора натуральных чисел $e \subset [1, d]$ определим оператор смешанной разности

$$\Delta_t^l(e) = \prod_{j\in e} \Delta_{t_j}^{l,j}, \qquad t = (t_1, \dots, t_d), \quad \Delta_t^l(\varnothing) = \mathrm{Id}\,.$$

Тогда

$$H^r_q = \Bigl\{f \in L_q(\mathbb{T}^d) : \forall\, e \subset [1, d],\ \|\Delta_t^l(e) f\|_q \leqslant \prod_{j\in e} |t_j|^r\Bigr\}.$$

Напомним еще два определения существенных в дальнейшем изложении. Пусть K – компакт в банаховом пространстве X с единичным шаром B_X. Величины

$$d_m(K, X) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^m \subset X}\ \sup_{f\in K}\ \inf_{c_i} \Bigl\| f - \sum_{i=1}^{m} c_i u_i \Bigr\|_X,$$

$$\varepsilon_m(K, X) = \inf\Bigl\{\varepsilon : \exists\, \{u_i\}_{i=1}^q \in X,\ q \leqslant 2^{m-1},\ K \subset \bigcup_{i=1}^{q} \{u_i + \varepsilon B_X\}\Bigr\}$$

($m = 1, 2, \dots$) называются соответственно m-м *поперечником по Колмогорову* и m-м *энтропийным числом* множества K в пространстве X.

В § 3 доказаны, в частности, следующие утверждения.

Теорема 3.1. *При* $r > \max(1/q, 1/2)$ *и* $1 < q \leqslant \infty$ *справедливы соотношения* $(d \geqslant 2)$

$$\varepsilon_m(H_q^r, QC) \asymp m^{-r}(\log m)^{r(d-1)+d/2},$$
$$\varepsilon_m(W_q^r, QC) \asymp m^{-r}(\log m)^{r(d-1)+1/2}.$$

Теорема 3.2. *При* $r > 1/2$ *и* $2 \leqslant q \leqslant \infty$ *справедливы соотношения* $(d \geqslant 2)$

$$d_m(H_q^r, QC) \asymp m^{-r}(\log m)^{r(d-1)+d/2},$$
$$d_m(W_q^r, QC) \asymp m^{-r}(\log m)^{r(d-1)+1/2}.$$

В § 4 рассматривается задача об эквивалентности равномерной и равномерной дискретной норм для тригонометрических полиномов с гармониками из гиперболических крестов. Хорошо известно, что для пространства $\mathscr{T}(\Pi)$ тригонометрических полиномов d-переменных со спектром в параллелепипеде Π найдется конечное множество Ω с числом элементов $|\Omega|$ по порядку равным размерности $\mathscr{T}(\Pi)$, для которого имеет место эквивалентность

$$\|t\|_\infty \asymp \|t\|_{\infty,\Omega} \equiv \max_{x\in\Omega}|t(x)|, \qquad t \in \mathscr{T}(\Pi).$$

Из полученных в § 4 результатов следует, что совершенно иначе обстоит дело для пространств $\mathscr{T}(Q_n)$ в d-мерном случае $(d = 2, 3, \dots)$: эквивалентность норм $\|t\|_\infty$ и $\|t\|_{\infty,\Omega}$ для всех полиномов из $\mathscr{T}(Q_n)$ может иметь место только если число точек в Ω значительно превосходит размерность $\dim \mathscr{T}(Q_n) \asymp 2^n n^{d-1}$: $|\Omega| \geqslant 2^{(1+\gamma)n}, \gamma > 0$.

Более точно, из доказанной в § 4 теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.1. *Пусть множество* $\Omega \subset \mathbb{T}^d$, $d \geqslant 2$, *обладает свойством: для любого полинома* $t \in \mathscr{T}(Q_n)$

$$\|t\|_\infty \leqslant b \cdot n^\alpha \|t\|_{\infty,\Omega}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$|\Omega| \geqslant c_1|Q_n|\exp(c \cdot n^{1-2\alpha}), \qquad c = c(b,\alpha,d), \quad c_1 = c_1(d).$$

Наконец, § 5 работы содержит ряд замечаний о свойствах QC нормы.

Основные результаты статьи были анонсированы в [5].

§ 2. Неравенства для тригонометрических полиномов

Основная цель этого параграфа – доказательство двух неравенств для QC нормы (теоремы 2.1 и 2.2). Сначала приведем некоторые простые свойства этой нормы.

Если $f \in L^1(d\mu)$ и

$$F(x,\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} r_s(\omega)\delta_s(f,x), \tag{2.1}$$

то

$$\inf_{\omega} \|F(\,\cdot\,,\omega)\|_\infty \leqslant \|f\|_{QC} \leqslant \sup_{\omega} \|F(\,\cdot\,,\omega)\|_\infty, \tag{2.2}$$

$$\|f\|_{QC} \geqslant \left\| \int_0^1 |F(x,\omega)|\,d\omega \right\|_\infty \gg \left\| \Bigl(\sum_s |\delta_s(f,x)|^2 \Bigr)^{1/2} \right\|_\infty, \tag{2.3}$$

$$\|f\|_{QC} \leqslant \sum_s \|\delta_s(f)\|_\infty \equiv \|f\|_{B_{\infty,1}}. \tag{2.4}$$

Докажем теперь теорему 2.1, сформулированную во введении. Эта теорема непосредственно вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $P_n \subset \mathbb{Z}^+$ обозначает арифметическую прогрессию вида $4l+b$, $l = 0,\dots,n$, $b \in \{1,2,3,4\}$. Тогда для любого действительного тригонометрического полинома f имеем*

$$\|f\|_{QC} \geqslant \frac{1}{4} \sum_{s \in P_n} \|\delta_s(f)\|_1 + |\widehat{f}(0)|.$$

Доказательство. Пусть $U_s = V_{2^s} - V_{2^{s-2}}$, $s \geqslant 2$, $U_1 = 2\cos x$, $U_0 \equiv 1$, где V_k – ядро Валле Пуссена:

$$V_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=k}^{2k-1} \sum_{|\nu| \leqslant l} e^{i\nu x}, \qquad k \geqslant 1.$$

Тогда $\deg U_s < 2^{s+1}$ и для $s \geqslant 1$

$$\widehat{U}_s(k) = 1, \ \text{ если } \ 2^{s-1} \leqslant |k| \leqslant 2^s,$$
$$\widehat{U}_s(k) = 0, \ \text{ если } \ |k| \leqslant 2^{s-2}.$$

Далее, пользуясь известной оценкой $\|V_k\|_1 \leqslant 2$, получаем: $\|U_s\|_1 \leqslant 4$.

Предположим, не ограничивая общности, что $\widehat{f}(0) \geqslant 0$ и для функции $f = \sum_s \delta_s(f)$ определим полиномы

$$g_s = \bigl(\operatorname{sign} \delta_s(f)\bigr) * U_s.$$

Тогда $\|g_s\|_\infty \leqslant 4$ и, используя обозначение

$$\langle f, g\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg\,dx \equiv \int fg\,d\mu,$$

находим:

$$\langle \delta_s(f), g_s\rangle = \langle \delta_s(f), \operatorname{sign}\delta_s(f)\rangle = \|\delta_s(f)\|_1. \tag{2.5}$$

Рассмотрим следующее произведение Рисса

$$\Phi(x,t) = \prod_{s\in P_n}\Big(1 + \frac{1}{4}\cdot g_s(x)\cdot r_s(t)\Big).$$

Это произведение может быть представлено в виде

$$\Phi(x,t) = 1 + \frac{1}{4}\sum_{s\in P_n} g_s(x) r_s(t) + \sum_e w_e(x,t),$$

где $e \subset P_n$, $|e| \geqslant 2$ и

$$w_e(x,t) = \prod_{s\in e}\frac{1}{4}\, g_s(x) r_s(t). \tag{2.6}$$

Изучим сначала $\Phi(x,t)$ как функцию от x при фиксированном t. В силу неравенства $\|g_s\|_\infty \leqslant 4$ функция $\Phi(\,\cdot\,,t)$ неотрицательна. Докажем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x,t)\,dx = 1.$$

Из определения $g_s(x)$ вытекает, что для всех $s \in P_n$ $\widehat{g}_s(0) = 0$.

Отметим еще, что для любого e, $|e| \geqslant 2$, нулевой коэффициент Фурье функции (переменной x) $w_e(x,t)$ равен нулю. Действительно, пусть $e = \{s_1 > s_2 > \dots > s_m\} \subset P_n$. Тогда разложение Фурье для $w_e(x,t)$ не содержит частот по модулю меньших чем

$$2^{s_1-2} - 2^{s_2+1} - \ldots - 2^{s_m+1} \geqslant 2^{s_1}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) > 0.$$

Таким образом, для каждого t

$$\|\Phi(\,\cdot\,,t)\|_1 = 1.$$

Изучим теперь $\Phi(x,t)$ как функцию от t при фиксированном x. Из (2.6) вытекает, что при любом фиксированном x функции (переменной t) $w_e(x,t)$, $e \subset P_n$, $|e| \geqslant 2$, ортогональны функциям Радемахера $r_s(t)$, $s = 0, 1, \ldots$ (и, кроме того, попарно ортогональны как различные функции Уолша). Поэтому (см. также (2.1) и (2.5)) имеет место равенство

$$
\begin{aligned}
I &\equiv \int_0^1 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x,t)\Phi(x,t)\,dx\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_s \int_0^1 r_s(t)\int_0^{2\pi} \delta_s(f,x)\Phi(x,t)\,dx\,dt \\
&= \sum_s \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta_s(f,x)\int_0^1 r_s(t)\Phi(x,t)\,dt\,dx \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{s\in P_n} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \delta_s(f,x)g_s(x)\,dx \\
&= |\hat{f}(0)| + \frac{1}{4}\sum_{s\in P_n} \|\delta_s(f)\|_1.
\end{aligned}
$$

Далее, для любого t

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x,t)\Phi(x,t)\,dx \leqslant \|F(\,\cdot\,,t)\|_\infty\|\Phi(\,\cdot\,,t)\|_1 = \|F(x,t)\|_\infty.$$

Следовательно,

$$I \leqslant \int_0^1 \|F(\,\cdot\,,t)\|_\infty\,dt,$$

что доказывает лемму 2.1

Перейдем теперь к многомерному случаю. Определим следующую норму функции f d-переменных ($d = 2, 3, \dots$)

$$\|f\|_{QC} = \big\|\|f(\,\cdot\,,x^1)\|_{QC}\big\|_\infty,$$

т.е. по переменной x_1 мы берем QC норму, а по остальным переменным – L_∞-норму.

Теорема 2.2. *Для любого полинома $f \in \mathcal{T}_r(\Delta Q_n)$, обладающего свойствами*

1) $\|\delta_s(f)\|_4 \leqslant 1$ $\forall s$, $\|s\|_1 = n$, *где* $\delta_s = \sum_{k\in\rho(s)} \hat{f}(k)e^{i(k,x)}$;

2) $\|f\|_2 \gg n^{(d-1)/2}$;

справедливо неравенство

$$\|f\|_{QC} \gg n^{d/2}.$$

Доказательство. Оценим $\|f\|_2^2$ через $\|f\|_{QC}$. Имеем

$$\|f\|_2^2 = \sum_{s_1=0}^{n} \Big\| \sum_{\|s^1\|_1 = n - s_1} \delta_s(f) \Big\|_2^2, \qquad s^1 = (s_2, \dots, s_d).$$

Используя неравенство $\|g\|_2 \leqslant \|g\|_1^{1/3} \|g\|_4^{2/3}$, продолжаем

$$\leqslant \sum_{s_1=0}^{n} \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^{d-1} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \Big\| \sum_{\|s^1\|_1 = n-s_1} \delta_s(f, \,\cdot\,, x^1) \Big\|_1^{2/3} \Big\| \sum_{\|s^1\|_1 = n-s_1} \delta_s(f, \,\cdot\,, x^1) \Big\|_4^{4/3} dx^1.$$

Пусть $f_{s_1} = \sum\limits_{\|s^1\|_1 = n-s_1} \delta_s(f)$. Применяя неравенство Гёльдера с показателями $3/2$ и 3, получаем

$$\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_1^{2/3} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_4^{4/3} \leqslant \Big(\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_1 \Big)^{2/3} \Big(\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_4^4 \Big)^{1/3}.$$

Далее, по теореме 2.1 для каждого x^1

$$\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_1 \leqslant 16 \cdot \|f(\,\cdot\,, x^1)\|_{QC} \leqslant 16 \, \|f\|_{QC}.$$

Таким образом, находим

$$\|f\|_2^2 \leqslant \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^{d-1} (16\, \|f\|_{QC})^{2/3} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \Big(\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_4^4 \Big)^{1/3} dx^1. \tag{2.7}$$

Оценим второй сомножитель в правой части неравенства (2.7). Используя неравенство $\|g\|_1 \leqslant \|g\|_3$, получаем

$$A \equiv \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \Big(\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_4^4 \Big)^{1/3} dx^1 \leqslant \Big(\int_{\mathbb{T}^{d-1}} \sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_4^4 dx^1 \Big)^{1/3}.$$

Применяя следующее неравенство, которое является следствием теоремы Литтлвуда–Пэли:

$$\|g\|_4 \leqslant C \cdot \Big(\sum_s \|\delta_s(g)\|_4^2 \Big)^{1/2},$$

имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^{d-1}} \|f_{s_1}(\,\cdot\,,x^1)\|_4^4 dx^1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{T}^{d-1}} |f_{s_1}(x,x^1)|^4\,dx^1\,dx_1 \\
&\ll \int_0^{2\pi}\biggl(\sum_{s^1:\ \|s^1\|_1=n-s_1} \|\delta_s(f,x_1,\,\cdot\,)\|_4^2\biggr)^2 dx_1 \\
&\ll \biggl\|\sum_{s^1}\|\delta_s(f,x_1,\,\cdot\,)\|_4^2\biggr\|_{2(x_1)}^2 \\
&\ll \biggl(\sum_{s^1}\Bigl\|\|\delta_s(f,x_1,\,\cdot\,)\|_4^2\Bigr\|_{2(x_1)}\biggr)^2 \\
&= C\biggl(\sum_{s^1}\|\delta_s(f)\|_4^2\biggr)^2.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$A \leqslant C\biggl(\sum_{s_1=0}^{n}\biggl(\sum_{s^1:\ \|s^1\|_1=n-s_1}\|\delta_s(f)\|_4^2\biggr)^2\biggr)^{1/3}.$$

Учитывая условие 1), мы получаем

$$A \leqslant C\bigl(n(n^{d-2})^2\bigr)^{1/3} = C\,n^{2d/3-1}.$$

В итоге из (2.7) и условия 2) теоремы 2.2 получаем

$$\|f\|_{QC} \gg n^{d/2},$$

что и требовалось доказать.

Докажем еще одно неравенство для тригонометрических полиномов одной переменной.

Теорема 2.3. *Для любого полинома вида*

$$f = \sum_{k=l+1}^{2l} p_k(x)\cos 4^k x,$$

где $p_k \in \mathscr{T}_r(2^l)$, $k = l+1,\dots,2l$, $l = 1,2,\dots$, *справедливо неравенство*

$$\|f\|_\infty \geqslant c\sum_{k=l+1}^{2l}\|p_k\|_1, \qquad c>0.$$

Доказательство. Рассмотрим полиномы

$$g_k = (\operatorname{sign} p_k) * V_{2^l}, \qquad k = l+1, \dots, 2l.$$

Тогда

$$\langle p_k, g_k \rangle = \|p_k\|_1, \qquad \|g_k\|_\infty \leqslant 2$$

и произведение Рисса

$$\Phi(x) = \prod_{k=l+1}^{2l} \left(1 + \frac{1}{2}\, g_k(x) \cos 4^k x\right)$$

представляет неотрицательную функцию. Докажем, что $\Phi(x)$ имеет вид

$$\Phi(x) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=l+1}^{2l} g_k(x) \cos 4^k x + t(x), \tag{2.8}$$

где $t(x)$ ортогонально подпространству

$$L = \left\{ a + \sum_{k=l+1}^{2l} t_k(x) \cos 4^k x,\ t_k \in \mathscr{T}_r(2^{l+1}),\ a \in \mathbb{R} \right\}.$$

В самом деле, $t(x)$ содержит слагаемые вида ($m \geqslant 2$)

$$\begin{aligned} w(x) &= 2^{-m} \prod_{i=1}^{m} g_{k_i}(x) \cos 4^{k_i} x \\ &= 2^{-m} \left(\frac{1}{2} \cos(4^{k_1} + 4^{k_2})x + \frac{1}{2} \cos(4^{k_1} - 4^{k_2})x\right) \cdot \prod_{i=3}^{m} \cos 4^{k_i} x \cdot \prod_{i=1}^{m} g_{k_i}(x), \end{aligned}$$

где $k_1 > k_2 > \dots > k_m > l$. Для частот w, соответствующих ненулевым коэффициентам Фурье функции $w(x)$, имеем

$$|w - 4^{k_1} - 4^{k_2}| \leqslant 4^{k_3} + \dots + 4^{k_m} + m2^{l+1}$$

или

$$|w - 4^{k_1} + 4^{k_2}| \leqslant 4^{k_3} + \dots + 4^{k_m} + m2^{l+1}.$$

Следовательно,

$$4^{k_2} - 4^{k_3} - \ldots - 4^{k_m} - m2^{l+1} \leqslant |w - 4^{k_1}| \leqslant 4^{k_2} + \dots + 4^{k_m} + m2^{l+1},$$

то есть

$$4^{k_2} \frac{2}{3} - l\, 2^{l+1} \leqslant |w - 4^{k_1}| \leqslant 4^{k_2} \frac{4}{3} + l\, 2^{l+1}.$$

Оценка сверху гарантирует, что $w(x)$ ортогонально 1 и всем $t_k(x)\cos 4^k x$, $t_k \in \mathcal{T}_r(2^{l+1})$, $k \neq k_1$. Оценка снизу гарантирует (при $l \geqslant 3$), что $w(x)$ ортогонально $t_{k_1}(x)\cos 4^{k_1}x$, $t_{k_1} \in \mathcal{T}_r(2^{l+1})$. Представление (2.8) установлено. В частности, (2.8) влечет, что $\|\Phi\|_1 = 1$.

Учитывая (2.8), для скалярного произведения $\langle f, \Phi\rangle$ имеем равенство

$$\langle f, \Phi\rangle = \frac{1}{2}\sum_{k=l+1}^{2l} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 4^k x\, p_k(x) g_k(x)\, dx. \tag{2.9}$$

При этом $\cos^2 4^k x = \frac{1}{2}(1+\cos 2\cdot 4^k x)$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_k(x) g_k(x)\cos^2 4^k x\, dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} p_k(x) g_k(x)\, dx = \frac{1}{2}\|p_k\|_1, \tag{2.10}$$

$k = l+1, \dots, 2l$. С другой стороны,

$$\langle f, \Phi\rangle \leqslant \|f\|_\infty \|\Phi\|_1 = \|f\|_\infty. \tag{2.11}$$

Собирая (2.9)–(2.11), находим

$$\|f\|_\infty \geqslant \frac{1}{4}\sum_{k=l+1}^{2l} \|p_k\|_1.$$

Теорема 2.3 доказана.

§ 3. Оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников

В этом параграфе доказываются теоремы 3.1 и 3.2, сформулированные во введении. Но предварительно мы находим порядки энтропийных чисел и поперечников классов функций одной переменной логарифмической гладкости. Доказательство в одномерном случае технически проще, хотя идейно близко к доказательству теорем 3.1 и 3.2 (см. также [2]).

Мы рассматриваем классы функций LG^r, которые задаются условием на равномерную норму двоичных блоков $\delta_s(f)$:

$$LG^r = \{f \in L^\infty(\mathbb{T}) : \|\delta_s(f)\|_\infty \leqslant (s+1)^{-r},\ s = 0, 1, \dots\}.$$

Теорема 3.3. *Для $r > 1$ справедливы соотношения*

$$\varepsilon_n(LG^r, L_p) \asymp d_n(LG^r, L_p) \asymp \begin{cases} (\log n)^{-r+1}, & \text{если } p = \infty,\\ (\log n)^{-r+1/2}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty. \end{cases}$$

Прежде чем доказывать теорему 3.3, отметим, что для функций из LG^r ряд двоичных блоков, например, $\delta_s(f), n \leqslant s \leqslant 2n$, имеют одинаковую оценку нормы, что приводит к необходимости учета интерференции между блоками. Подобная ситуация нередко возникает при изучении классов функций многих переменных с ограничениями на смешанную производную или разность. Однако, при этом интерферируют блоки "одинаковой величины" ($\delta_s(f)$ и $\delta_v(f)$ с $\|s\|_1 = \|v\|_1$). В случае же классов LG^r размеры интерферирующих блоков существенно отличаются.

Из теоремы 3.3 вытекает, в частности, что порядок поперечника меняется скачкообразно при переходе от метрики L_p, $p < \infty$, к L_∞. Подобное явление наблюдается в двумерном случае для классов H^r_∞ (см. [2]).

Доказательство теоремы 3.3. Оценки сверху для поперечников не вызывают затруднений. При $p = \infty$ и $r > 1$ тривиальным образом имеем для $f \in LG^r \subset C(0, 2\pi)$

$$\|f - S_{2^m}(f)\|_\infty \leqslant \sum_{s>m} \|\delta_s(f)\|_\infty \ll m^{-r+1}.$$

Для $2 < p < \infty$, используя теорему Литтлвуда–Пэли получаем для $f \in LG^r$,

$$\|f - S_{2^m}(f)\|_p \leqslant C(p)\Big(\sum_{s>m} \|\delta_s(f)\|_p^2\Big)^{1/2} \ll m^{-r+1/2}.$$

Нетривиальная часть теоремы состоит в доказательстве оценок снизу, в особенности, при $p = \infty$. Установим оценки снизу энтропийных чисел. Сначала рассмотрим случай $p = 1$. Здесь нам понадобится следующее известное утверждение (см. [6], [7]).

Лемма 3.1. *Справедливы неравенства*

$$\varepsilon_{2m+1}\big(\mathcal{T}_r(m)_\infty\big)_1 \geqslant c > 0, \qquad m = 1, 2, \dots,$$

для энтропийных чисел единичного L_∞-шара пространства действительных тригонометрических полиномов порядка m в норме L_1.

Из леммы 3.1 непосредственно вытекает

Лемма 3.2. *Существует абсолютная постоянная $c_0 > 0$ такая, что в каждом подпространстве*

$$\mathcal{T}_r[N, N+m] \equiv \Big\{t = \sum_{N \leqslant |k| \leqslant N+m} c_k e^{ikx},\ c_k = \bar{c}_{-k}\Big\}$$

можно найти 2^m функций $t^1, \dots, t^{2^m}$ таких, что

1) $\|t^i\|_\infty \leqslant 1 \ \ \forall i$;
2) $\|t^{i_1} - t^{i_2}\|_1 \geqslant c_0$, $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in [1, 2^m]$.

Зафиксируем теперь число l и построим специальный набор функций. Для каждого $j = l+1, \dots, 2l$ применим лемму 3.2 к множеству $\mathcal{T}_r[2^j, 2^j + 2^l]$ и получим l наборов $\{t_j^i\}_{i=1}^{2^{2^l}} \subset \mathcal{T}_r[2^j, 2^j + 2^l]$, $j = l+1, \dots, 2l$, со свойствами

1) $\|t_j^i\|_\infty \leqslant 1$;

2) $\|t_j^{i_1} - t_j^{i_2}\|_1 \geqslant c_0, \forall j, i_1 \neq i_2$.

Рассмотрим множество функций, которые определяются следующим образом. Пусть $I = (i_{l+1}, \dots, i_{2l})$, $i_j \in [1, 2^{2^l}]$ и

$$f_I = \sum_{j=l+1}^{2l} t_j^{i_j}. \tag{3.1}$$

Всего таких функций 2^{l2^l}.

Воспользуемся следующей известной и несложно проверяемой леммой.

Лемма 3.3. *Пусть заданы натуральные числа m, μ, $\mu < m$, и "параллелепипед" $\Pi \subset \mathbb{Z}^m$*

$$\Pi = \bigotimes_{j=1}^{m} [1, M_j],$$

причем для некоторых $Q \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}$, $Q \leqslant M$,

$$Q \leqslant M_j \leqslant M, \qquad j = 1, 2, \dots, m.$$

Тогда найдется множество $\Omega \subset \Pi$ из не менее $\left[\frac{Q^m - 1}{\binom{m}{\mu} M^\mu}\right]$ различных точек, обладающее свойством: если $x = \{x_j\} \in \Omega$, $y = \{y_j\} \in \Omega$, $x \neq y$, то

$$\big|\{j : x_j \neq y_j\}\big| \geqslant \mu.$$

Рассмотрим сейчас в качестве Π "куб" $\bigotimes_{j=1}^{l} [1, M]$, $M = 2^{2^l}$, $m = l$, $\mu = [l/3]$. Тогда $\left[\frac{M^m - 1}{\binom{m}{\mu} M^\mu}\right] \geqslant 2^{2^{l-1} l}$. Пусть Ω – множество точек (наборов) I, построенное в лемме 3.3, и $\mathcal{F} = \{f_I,\ I \in \Omega\}$ (см. (3.1)). Тогда для $f \in \mathcal{F}$ имеем

$$\begin{gathered} \|\delta_s(f)\|_\infty \leqslant 1, \quad s = l+1, \dots, 2l; \\ \delta_s(f) = 0 \quad \text{для других} \quad s. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Следовательно, по теореме Литтлвуда–Пэли

$$\|f\|_4 \leqslant C\, l^{1/2} \tag{3.3}$$

и, используя неравенство

$$\|f\|_2 \leqslant \|f\|_1^{1/3}\|f\|_4^{2/3},$$

для любых $f, g \in \mathscr{F}$, $f \neq g$, мы находим

$$\|f-g\|_1 \geqslant C\big(l^{-1/3}\|f-g\|_2\big)^3 \geqslant cl^{1/2}. \tag{3.4}$$

Таким образом, мы построили множество $\mathscr{F}$ функций, обладающих свойствами (3.2)–(3.4) с числом элементов $\#\mathscr{F} \geqslant 2^{l2^{l-1}}$. Следовательно,

$$\varepsilon_{l2^{l-1}}(\mathscr{F}, L_1) \gg l^{1/2}.$$

Далее, (3.2) влечет, что $(2l)^{-r}\mathscr{F} \subset LG^r$ и

$$\varepsilon_{2^l}(LG^r, L_1) \gg l^{-r+1/2},$$

что завершает доказательство оценки снизу для случая $1 \leqslant p < \infty$. Перейдем к случаю $p = \infty$. Здесь мы будем опираться на теорему 2.3. В остальном доказательство аналогично уже рассмотренному случаю $p = 1$. Мы отметим только изменения, которые нужно внести в доказательство для $p = \infty$. Вместо функций f_I рассмотрим

$$h_I = \sum_{k=l+1}^{2l} t^{i_k} \cos 4^k x,$$

где набор тригонометрических полиномов t^{i_k} порядка 2^l с числом элементов 2^{2^l} удовлетворяет требованиям леммы 3.2 (при $N = 0$, $m = 2^l$). Из этих полиномов выбирается, полностью аналогично предыдущему (см. лемму 3.3), подмножество

$$H = \{h_I,\ I \in \Omega\}.$$

Пользуясь теперь (вместо оценки (3.4)) теоремой 2.3 мы для $h \in H$, $g \in H$, $h \neq g$, будем иметь

$$\|h-g\|_\infty \geqslant cl,$$

откуда (с учетом включения $(4l)^{-r}H \subset LG^r$) вытекает неравенство

$$\varepsilon_{2^l}(LG^r, L_\infty) \gg l^{-r+1}.$$

Таким образом, оценки сверху для поперечников и такие же по порядку оценки снизу для энтропийных чисел получены. Остается применить следующую лемму, вытекающую из одного неравенства Карла (см. [8]).

Лемма 3.4. *Пусть A – компакт в сепарабельном банаховом пространстве X. Предположим, что для пары чисел (r,b), где $r>0$, $b\in\mathbb{R}$, либо $r=0$, $b<0$, выполнены соотношения*

$$d_m(A,X) \ll m^{-r}(\log m)^b,$$
$$\varepsilon_m(A,X) \gg m^{-r}(\log m)^b.$$

Тогда

$$\varepsilon_m(A,X) \asymp d_m(A,X) \asymp m^{-r}(\log m)^b.$$

Теорема 3.3 доказана.

Доказательство теорем 3.1 и 3.2. Следующая лемма является следствием теоремы 6 работы Лоренца [10] (см. также [11]).

Лемма 3.5. *Пусть A – компакт в сепарабельном банаховом пространстве X. Предположим, что при $m\to\infty$*

$$\varepsilon_m(A,X) \asymp m^{-r}(\log m)^a, \qquad r>0, \quad a\in\mathbb{R}.$$

Тогда

$$d_m(A,X) \gg m^{-r}(\log m)^a.$$

Из леммы 3.5 вытекает, что для доказательства оценок снизу в теореме 3.2 достаточно установить теорему 3.1. Мы начнем с доказательства оценок снизу в теореме 3.1. Это доказательство основано на теореме 2.2, а в остальном проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.1 из [2].

Пусть $N_\varepsilon(F,X)$ – минимальное число замкнутых шаров радиуса ε пространства X, необходимое для покрытия (компактного) множества F, а $M_\varepsilon(F,X)$ – максимальное число точек $x_i\in F$ таких, что $\|x_i-x_j\|>\varepsilon$, $i\neq j$. Тогда, как хорошо известно,

$$N_\varepsilon(F,X) \leqslant M_\varepsilon(F,X) \leqslant N_{\varepsilon/2}(F,X). \tag{3.5}$$

В случае, когда $X=X_n$ – конечномерное пространство размерности n, известны (см., например, [8; с. 63]) и элементарно проверяются неравенства

$$N_\varepsilon(B_X,X) \geqslant \varepsilon^{-n}, \qquad 0<\varepsilon\leqslant 1, \tag{3.6}$$

$$N_\varepsilon(B_Y,X) \geqslant \varepsilon^{-n}\frac{\mathrm{Vol}(B_Y)}{\mathrm{Vol}(B_X)}, \qquad 0<\varepsilon\leqslant 1, \tag{3.7}$$

где B_X обозначает единичный шар пространства X.

Пусть $D_n = \bigcup_{s\in Y_n^d} \rho(s)$ и $\mathcal{T}_r(D_n)$ – соответствующее пространство действительных тригонометрических полиномов. Построим для каждого n набор функций $\{f_i^n\}_{i=1}^{A_n}$, $f_i^n\in\mathcal{T}_r(D_n)$, со свойствами:

(1) $\|\delta_s(f_i^n)\|_\infty \leqslant 1$, $s\in Y_n^d$, $i=1,\dots,A_n$;

(2) $\|f_i^n-f_j^n\|_{QC} \geqslant c(d)n^{d/2}$, $i\neq j$;

(3) $A_n \geqslant 2^{|D_n|/2}$.

Для $s \in Y_n^d$ обозначим через $b(s)$ d-мерный вектор $b(s) = (b_1(s), \dots, b_d(s))$, $b_j(s) = 2^{s_j-2} - 1$, если $s_j \geqslant 2$ и $b_j(s) = 0$, если $s = 0, 1$.

Пусть $\mathcal{T}_r(b(s))$ – пространство действительных тригонометрических полиномов вида

$$t(x) = \sum_{0 \leqslant k_j \leqslant b_j(s),\, 1 \leqslant j \leqslant d} \; \sum_{e \subset [1,d]} a_k^e \prod_{j \in e} \cos k_j x_j \prod_{j \in [1,d] \setminus e} \sin k_j x_j,$$

где $a_k^e \in \mathbb{R}$ – соответствующие коэффициенты Фурье $t(x)$, e пробегает все подмножества отрезка натурального ряда $[1, \dots, d]$. Будем рассматривать $\{a_k^e\}$ как вектор в $\mathbb{R}^{v(b(s))}$, где для $b \in \mathbb{R}^d$ $v(b) \equiv \prod_{j=1}^{d} (2b_j + 1)$, причем $v(b(s)) = \dim \mathcal{T}_r(b(s))$. Пусть для $b \in \mathbb{Z}_+^d$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ $A_p(b) \subset \mathbb{R}^{v(b)}$ – множество коэффициентов $\{a_k^e\}_{k,e} \subset \mathbb{R}^{v(b)}$ полиномов $t \in \mathcal{T}_r(b)$ таких, что $\|t\|_p \leqslant 1$.

Имея в виду использование неравенства (3.7), приведем одну известную оценку объема для $A_p(b)$ (см. [7] при $d = 1$, [12; с. 140, лемма 1.2] при $d > 1$).

Лемма 3.6. *Справедлива оценка*

$$\operatorname{Vol}\big(A_\infty(b)\big) \geqslant v(b)^{-v(b)/2} [c_2(d)]^{-v(b)}.$$

Используя формулу для объема единичного евклидова шара $A_2(b)$ в $\mathbb{R}^{v(b)}$, из которой вытекает, что

$$\operatorname{Vol}\big(A_2(b)\big) \leqslant v(b)^{-v(b)/2} [c_3(d)]^{-v(b)},$$

мы легко выводим из (3.5), (3.7) и леммы 3.6 следующее утверждение: *существуют постоянная $c_4(d) > 0$ и семейство полиномов $\{t_i^b,\ i = 1, 2, \dots, 2^{v(b)}\} \subset \mathcal{T}_r(b)$ такие, что*

$$\|t_i^b\|_\infty \leqslant 1, \qquad i = 1, \dots, 2^{v(b)}, \tag{3.8}$$

$$\|t_i^b - t_j^b\|_2 \geqslant c_4(d), \qquad i \neq j. \tag{3.9}$$

Далее, для каждого набора $I = \{i(s),\ s \in Y_n^d\}$ с $i(s) \in \{1, \dots, 2^{v(b(s))}\}$ определим функцию

$$f_I^n = \sum_{s \in Y_n^d} \left(\prod_{j=1}^{d} \cos k_j^s x \right) t_{i(s)}^{b(s)}, \tag{3.10}$$

где для $s \in Y_n^d$ $k_j^s = 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}$, если $s_j \geqslant 2$ и $k_j^s = s_j$, если $s_j = 0, 1$.

Общее число таких функций

$$N = \prod_{s \in Y_n^d} 2^{v(b(s))}.$$

Отметим, что $\forall\, s \in Y_n^d$

$$0 < c(d) \cdot \dim \mathcal{T}_r(\rho(s)) \leqslant v(b(s)) \leqslant \dim \mathcal{T}_r(\rho(s)) = 2^n.$$

Учитывая этот факт нетрудно проверить с помощью леммы 3.3, что во множестве $\prod\limits_{s \in Y_n^d} [1, 2^{v(b(s))}]$ наборов I можно найти подмножество G_n, $|G_n| \geqslant 2^{2^n n^{d-1} c'(d)}$, с дополнительным свойством: любые два различных набора $I, J \in G_n$ имеют по крайней мере $c''(d)|Y_n^d|$ различных "координат" $i(s)$; $c'(d) > 0, c''(d) > 0$.

Проверим, что для любых $I, J \in G_n$, $I \neq J$,

$$\|f_I^n - f_J^n\|_{QC} \gg n^{d/2}. \tag{3.11}$$

Этот факт вытекает из теоремы 2.2 и следующего элементарно проверяемого неравенства: для любого полинома $t(x) \in \mathcal{T}_r(b(s))$

$$\left\| \left(\prod_{j=1}^{d} \cos k_j^s x \right) t(x) \right\|_2 \geqslant c\,\|t(x)\|_2, \qquad c = c(d) > 0 \tag{3.12}$$

$\Bigl($здесь числа k_j^s и b_j^s те же, что и в (3.10); отметим еще, что при этих k_j^s и b_j^s полином $\left(\prod\limits_{j=1}^{d} \cos k_j^s x \right) t(x)$ лежит в подпространстве $\mathcal{T}_r(\rho(s))$ и, следовательно, при различных s эти полиномы имеют непересекающиеся спектры$\Bigr)$.

Из (3.11) и включения

$$\{f_I^n \cdot 2^{-rn}\}_{I \in G_n} \subset H_\infty^r \cdot C(r,d)$$

(см. (3.10) и теорему 1.1 гл. II в [13]) вытекает оценка снизу для $\varepsilon_m(H_q^r, QC)$.

Из (3.11) и включения

$$\{f_I^n \cdot 2^{-rn} n^{-(d-1)/2}\} \subset W_q^r \cdot C(r,d), \qquad 1 < q < \infty$$

(которое вытекает из (3.10), теоремы Литтлвуда–Пэли и теоремы 1.1 гл. I в [13]) получаем оценку снизу для $\varepsilon_m(W_q^r, QC)$ при любом $r > 0$.

Оценка снизу для $\varepsilon_m(W_\infty^r, QC)$ при $r > 1/2$ вытекает из только что доказанных оценок снизу для $\varepsilon_m(W_q^r, QC)$, $q < \infty$, оценки сверху для $\varepsilon_m(W_2^r, QC)$, которая будет доказана ниже, и следующего неравенства:

$$\varepsilon_{2m}(W_4^r, QC) \leqslant 2\varepsilon_m(W_2^r, QC)^{1/2} \cdot \varepsilon_m(W_\infty^r, QC)^{1/2} \tag{3.13}$$

(оценка (3.13) – частный случай оценки энтропийных чисел оператора, действующего из "промежуточного пространства", см. [14; п. 12.1.12]; в нашем случае рассматривается оператор тождественного вложения $W_4^r \hookrightarrow QC$).

Доказательство оценок сверху в теоремах 3.1 *и* 3.2. Ниже через $\mathcal{T}(\Delta Q_n)_q$ обозначаем единичный L_q-шар в пространстве $\mathcal{T}(\Delta Q_n)$, а через $\mathcal{T}(\Delta Q_n)_{B_{q,\infty}}$ – множество полиномов f из $\mathcal{T}(\Delta Q_n)$ таких, что $\|\delta_s(f)\|_q \leqslant 1$, $\|s\|_1 = n$. Кроме того, положим

$$\gamma(q,a,b) = \begin{cases} \left(\dfrac{b}{a}\right)^{1/q} \left[\ln\left(1 + \dfrac{b}{a}\right)\right]^{1/q-1/2}, & a \leqslant b, \\ e^{-a/b}, & a > b. \end{cases}$$

Лемма 3.7. *Для* $1 < q \leqslant 2$ *имеют место соотношения*

$$\varepsilon_m\big(\mathcal{T}(\Delta Q_n)_q, QC\big) \ll n^{1/2}\gamma(q, m, K|\Delta Q_n|), \tag{3.14}$$

$$\varepsilon_m\big(\mathcal{T}(\Delta Q_n)_{B_{q,\infty}}, QC\big) \ll n^{d/2}\gamma(q, m, K|\Delta Q_n|), \tag{3.15}$$

$$d_m\big(\mathcal{T}(\Delta Q_n)_2, QC\big) \ll n^{1/2}(|\Delta Q_n|/m)^{1/2} \tag{3.16}$$

($K = K(d)$; *другие константы в неравенствах* (3.14)–(3.16) *также не зависят ни от* m, *ни от* n).

Доказательство леммы 3.7 использует известную технику оценок энтропии и поперечников. Пусть X обозначает пространство $\mathbb{R}^N$ с нормой $\|\cdot\|_X$. Как обычно обозначим B_2^N и S^{N-1} соответственно единичный евклидов шар в $\mathbb{R}^N$ и его границу. Пусть также $\sigma = \sigma_N$ – нормированная мера Лебега на S^{N-1}. Следующая величина играет важную роль в оценках ε-энтропии и поперечников по Колмогорову (см. подробнее [8]):

$$M_X := \int_{S^{N-1}} \|f\|_X \, d\sigma.$$

Лемма 3.8 (см. [15]). *Имеет место оценка*

$$\varepsilon_m(B_2^N, X) \ll \gamma(2, m, N) \cdot M_X.$$

Установим сначала оценку (3.14) в частном случае $q = 2$. Рассмотрим множество $\mathcal{T}(\Delta Q_n)^e$ полиномов из $\mathcal{T}(\Delta Q_n)_r$ с действительными коэффициентами. Тогда $\mathcal{T}(\Delta Q_n)_2^e$ может рассматриваться как евклидов шар в $\mathbb{R}^N$, $N = |\Delta Q_n|/2$. Легко видеть, что оценку (3.14) (при $q = 2$) достаточно доказать для $\mathcal{T}(\Delta Q_n)_2^e$.

Если полином f представить в виде

$$f(x) = \sum_s \sum_{2^{s-1} \leqslant |k_1| < 2^s} e^{ik_1x_1} f_{k_1}(x^1),$$

то по определению QC нормы

$$\|f\|_{QC} = \int_0^1 \Big\| \sum_s r_s(\omega) \sum_{2^{s-1} \leqslant |k_1| < 2^s} e^{ik_1x_1} f_{k_1}(x^1) \Big\|_\infty d\omega. \tag{3.17}$$

Из (3.17) легко усмотреть, что в рассматриваемом нами случае

$$M_{QC} = \int_{S^{N-1}} \|f\|_{QC} \, d\sigma = \int_{S^{N-1}} \|f\|_\infty \, d\sigma. \tag{3.18}$$

Последняя величина уже оценивалась в [16]:

$$\int_{S^{N-1}} \|f\|_\infty \, d\sigma \ll n^{1/2} \tag{3.19}$$

(отметим, что неравенство (3.19) легко вытекает из экспоненциальной оценки для полиномов по системе Радемахера).

Лемма 3.8 и (3.18), (3.19) дают оценку (3.14) при $q = 2$.

Перейдем к общему случаю $1 < q < 2$ и докажем, что справедлива

Лемма 3.9. *Имеют место оценки*

$$\varepsilon_m(\mathcal{T}(\Delta Q_n)_q, L_2) \ll \begin{cases} \left(\frac{|\Delta Q_n|}{m}\right)^{1/q-1/2}\left[\log\left(\frac{|\Delta Q_n|}{m}+1\right)\right]^{1/q-1/2}, & m \leqslant |\Delta Q_n|, \\ 2^{-mc/|\Delta Q_n|}, \ c = c(d) > 0, & m > |\Delta Q_n|. \end{cases}$$

Эта лемма выводится стандартным способом из соответствующего результата об энтропии в метрике l_p^N l_q-шаров

$$B_q^N = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^q\right)^{1/q} \leqslant 1\right\}.$$

Лемма 3.10 (см. [17]). *Для* $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$

$$\varepsilon_m(B_q^N, l_p^N) \ll \begin{cases} \left(\frac{\log(\frac{N}{m}+1)}{m}\right)^{1/q-1/p}, & m \leqslant N, \\ m^{1/p-1/q}2^{-m/N}, & m > N. \end{cases}$$

Мы используем также известную теорему Марцинкевича об эквивалентности обычной L_q нормы и L_q-сеточной нормы тригонометрических полиномов. Именно, из этой теоремы следует, что для любого $s \in \mathbb{Z}_+^d$, $\|s\|_1 = n$, и для любого полинома

$$t(x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{t}(k)e^{i(k,x)}$$

при $1 < q < \infty$ имеют место неравенства:

$$k_1(d,q)\left(\frac{1}{2^n}\sum_{x \in \Omega_s}|t(x)|^q\right)^{1/q} \leqslant \|t\|_{L_q} \leqslant k_2(d,q)\left(\frac{1}{2^n}\sum_{x \in \Omega_s}|t(x)|^q\right)^{1/q},$$

где $k_1(d,q) > 0$ и при $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\Omega_s = \left\{\left(\frac{2\pi l_1}{2^{s_1+1}+1}, \dots, \frac{2\pi l_d}{2^{s_d+1}+1}\right)\right\}, \quad 0 \leqslant l_j \leqslant 2^{s_j+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant d.$$

Поставим в соответствие полиному $f \in \mathcal{T}_r(\Delta Q_n)$ вида

$$f = \sum_{s,\, \|s\|_1 = n} \delta_s(f, x)$$

вектор

$$v(f) = \{\delta_s(f,x)\}_{\|s\|_1 = n,\, x \in \Omega_s} \in \mathbb{R}^N, \quad N \asymp 2^n n^{d-1}$$

(порядок координат зафиксирован произвольно, одинаково для всех f). Используя теорему Марцинкевича и неравенство

$$\left(\sum_s \|\delta_s(f)\|_q^2\right)^{1/2} \ll \|f\|_{L_q}, \qquad 1 < q \leqslant 2,$$

которое является следствием теоремы Литтлвуда–Пэли, оценим l_q-норму вектора $v(f)$, $1 < q < 2$:

$$\begin{aligned}\|v(f)\|_{l_q} &\asymp 2^{n/q}\Bigg(\sum_{s,\,\|s\|_1=n} \|\delta_s(f)\|_q^q\Bigg)^{1/q} \\ &\ll 2^{n/q} n^{(d-1)(1/q-1/2)}\Bigg(\sum_{s,\,\|s\|_1=n} \|\delta_s(f)\|_q^2\Bigg)^{1/2} \\ &\ll 2^{n/q} n^{(d-1)(1/q-1/2)}\|f\|_q. \end{aligned} \tag{3.20}$$

При $q = 2$ имеет место эквивалентность

$$\|v(f)\|_{l_2} \asymp 2^{n/2}\|f\|_2. \tag{3.21}$$

Отметим еще следующий факт. Пусть $L \subset l_2^N$ – подпространство. Тогда

$$\varepsilon_m(B_q^N \cap L, l_2^N \cap L) \leqslant \varepsilon_m(B_q^N, l_2^N). \tag{3.22}$$

Доказательство оценки (3.22) очевидно: искомую ε-сеть в $l_2^N \cap L$ образуют ортопроекции точек из ε-сети для B_q^N.

Мы используем (3.22) в случае, когда

$$L = \{v(f),\ f \in \mathcal{T}_r(\Delta Q_n)\},$$

при этом $(\dim L)/N > c > 0$. Учитывая также (3.21) и (3.20) мы из леммы 3.10 и (3.22) получим утверждение леммы 3.9.

Завершим доказательство оценки (3.14) для $1 < q < 2$. Имеет место неравенство

$$\varepsilon_{2m}\big(\mathcal{T}_r(\Delta Q_n)_q, QC\big) \leqslant \varepsilon_m\big(\mathcal{T}_r(\Delta Q_n)_q, L^2\big) \cdot \varepsilon_m\big(\mathcal{T}_r(\Delta Q_n)_2, QC\big). \tag{3.23}$$

Остается применить лемму 3.9 и воспользоваться уже доказанной частью оценки (3.14) для $q = 2$.

Оценка (3.15) доказывается аналогично и несколько проще, чем (3.14). Вместо леммы 3.9 мы доказываем неравенство

$$\begin{aligned}&\varepsilon_m\big(\mathcal{T}_r(\Delta Q_n)_{B_{q,\infty}}, L^2\big) \\ &\ll n^{(d-1)/2}\begin{cases} \left(\dfrac{|\Delta Q_n|}{m}\right)^{1/q-1/2}\left[\log\left(\dfrac{\Delta Q_n}{m}+1\right)\right]^{1/q-1/2}, & m \leqslant |\Delta Q_n|, \\ 2^{-mc/|\Delta Q_n|}, & m > |\Delta Q_n|. \end{cases}\end{aligned} \tag{3.24}$$

При этом мы вновь используем дискретизацию, основанную на теореме Марцинкевича, лемму 3.10, а также следующее, аналогичное (3.23), неравенство

$$\varepsilon_{2m}\big(\mathcal{T}_r(\Delta Q_n)_{B_{q,\infty}}, QC\big) \leqslant \varepsilon_m\big(\mathcal{T}_r(\Delta Q_n)_{B_{q,\infty}}, L^2\big) \cdot \varepsilon_m\big(\mathcal{T}_r(\Delta Q_n)_2, QC\big).$$

Перейдем к проверке оценки (3.16). Она проводится аналогично доказательству неравенства (3.14) в случае $q = 2$. Вместо леммы 3.8 используется

Лемма 3.11 (см. [15]). *Имеет место оценка*

$$d_m(B_2^N, X) \ll M_{X,2}\Big(\frac{N}{m}\Big)^{1/2},$$

где

$$M_{X,2} \equiv \Big(\int_{S^{N-1}} \|f\|_X^2\, d\sigma\Big)^{1/2}.$$

Аналогично оценке величины M_{QC} (см. (3.18)), используя неравенство

$$M_{L^\infty,2} \ll n^{1/2}$$

(см. [18]), находим

$$M_{QC,2} \leqslant M_{L^\infty,2} \ll n^{1/2}. \tag{3.25}$$

Неравенство (3.16) вытекает из леммы 3.11 и (3.25).

Завершим доказательство оценок сверху в теоремах 3.1 и 3.2. Ясно, что теорему 3.1 достаточно доказать для $1 < q \leqslant 2$ и $r > 1/q$, а теорему 3.2 для $q = 2$ и $r > 1/2$. Доказательство использует лемму 3.7 и следующие известные свойства функций из классов W_q^r и H_q^r. Для любой функции $f \in W_q^r$, $1 < q \leqslant 2$, имеем (см. [13; гл. II, теорема 2.1])

$$\Big\|\sum_{k\in\Delta Q_n} \hat f(k) e^{i(k,x)}\Big\|_q \ll 2^{-rn}. \tag{3.26}$$

Для любой $f \in H_q^r$, $1 < q < \infty$ (см. [13; гл. II, теорема 1.1])

$$\|\delta_s(f)\|_q \ll 2^{-r\|s\|_1}. \tag{3.27}$$

При доказательстве первого соотношения в теореме 3.1 используем (3.27) и (3.15) из леммы 3.7. При доказательстве второго соотношения в теореме 3.1 используем (3.26) и (3.16). При доказательстве второго соотношения в теореме 3.2 используем (3.26) и (3.16). Наконец, при доказательстве первого соотношения в теореме 3.2 используем (3.16) и следующее простое следствие неравенства (3.27): для любой $f \in H_2^r$

$$\Big\|\sum_{\|s\|_1=n} \delta_s(f)\Big\|_2 \ll n^{(d-1)/2} 2^{-rn}.$$

Во всех четырех случаях доказательство проводится аналогично. Мы приведем лишь доказательство второго соотношения в теореме 3.1.

Пусть задано достаточно большое m. Подберем n так, чтобы

$$|\Delta Q_{n-1}| < m \leqslant |\Delta Q_n|.$$

Тогда $m \asymp 2^n n^{d-1}$. Положим $\sigma = \frac{1}{2}\min(r - 1/q, 1)$ и

$$\overline{m}_l = c_\sigma \begin{cases} [m\, 2^{-\frac{1}{2}(n-l)}], & l < n, \\ [m\, 2^{-\sigma(l-n)}], & l \geqslant n, \end{cases}$$

где $c_\sigma > 0$ подобрано так, что

$$\sum_{l=0}^{\infty} \overline{m}_l \leqslant m.$$

Пусть $m_l = [\overline{m}_l]$. Тогда $m_l = 0$, если $c_\sigma m\, 2^{-\sigma(l-n)} < 1$, т.е. при

$$l > n_1 \equiv n + \frac{1}{\sigma}\log c_\sigma m.$$

Обозначим

$$S_{\Delta Q_l}(W^r_q) \equiv \left\{ g = \sum_{k \in \Delta Q_l} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},\ f \in W^r_q \right\}$$

и

$$\|S_{\Delta Q_l}(W^r_q)\|_{QC} \equiv \sup_{g \in S_{\Delta Q_l}(W^r_q)} \|g\|_{QC}.$$

Тогда

$$\varepsilon_m(W^r_q, QC) \leqslant \sum_{l=0}^{n_1} \varepsilon_{m_l}(S_{\Delta Q_l}(W^r_q), QC) + \sum_{l > n_1} \|S_{\Delta Q_l}(W^r_q)\|_{QC} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 .$$

Каждое слагаемое в $\sum_2$ может быть оценено с помощью (3.26) и неравенства (см. [13; гл. I, теорема 2.1]) $\|f\|_\infty \ll 2^{l/q} l^{(d-1)/(1-1/q)} \|f\|_q$, $f \in \mathcal{T}(Q_l)$:

$$\|S_{\Delta Q_l}(W^r_q)\|_{QC} \ll 2^{-l(r-1/q)} l^{(d-1)(1-1/q)}.$$

Проводя суммирование по $l > n_1$ и учитывая определение n_1, получим

$$\sum\nolimits_2 \ll 2^{-rn}. \tag{3.28}$$

Далее, используя (3.26) и лемму 3.7 находим

$$\sum_{l<n} \varepsilon_{m_l}(S_{\Delta Q_l}(W^r_q), QC) \ll \sum_{l<n} 2^{-rl} n^{1/2} \exp\left\{ -\frac{m_l}{K|\Delta Q_l|} \right\} \ll 2^{-rn} n^{1/2} \tag{3.29}$$

и

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant l\leqslant n_1} &\varepsilon_{m_l}\big(S_{\Delta Q_l}(W^r_q), QC\big) \\
&\ll \sum_{n\leqslant l\leqslant n_1} 2^{-rl} n^{1/2}\left(\frac{|\Delta Q_l|}{m_l}\right)^{1/q}\left[\ln\left(1+\frac{|\Delta Q_l|}{m_l}\right)\right]^{1/q-1/2} \\
&\ll 2^{-rn} n^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Объединяя неравенства (3.28)–(3.30) и учитывая, что $m \asymp 2^n n^{d-1}$, завершаем доказательство оценки сверху во втором соотношении теоремы 3.1.

§ 4. О равномерной сеточной норме полиномов из $\mathscr{T}(\Delta Q_n)$

В этом параграфе доказывается

Теорема 4.1. *Пусть при некоторых $n \geqslant 1$ и $y \geqslant 1$ конечное множество $\Omega \subset \mathbb{T}^2$ обладает свойством: для любого полинома $t \in \mathscr{T}(\Delta Q_n)$ имеет место неравенство*

$$
\|t\|_\infty \leqslant y\,\|t\|_{\infty,\Omega}. \tag{4.1}
$$

Тогда число элементов в Ω допускает оценку снизу

$$
|\Omega| \geqslant c_1|\Delta Q_n|\cdot \exp\left(\frac{c_2 n}{y^2}\right), \tag{4.2}
$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ – абсолютные постоянные.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что n достаточно велико и $1 \leqslant y \leqslant c_3 n^{1/2}$, где $c_3 > 0$ – произвольная абсолютная постоянная. Кроме того считаем, что n четно (для нечетных n рассуждения полностью аналогичны).

Пусть $g_k(\omega)$, $k \in \mathbb{Z}^2$, – набор независимых нормально распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, занумерованных точками из $\mathbb{Z}^2$.

Рассмотрим случайный процесс

$$
P(x,\omega) = \sum_{s\in Y_n^2}\ \sum_{k=(k_1,k_2)\in\rho(s)\cap\mathbb{Z}^2_+} \lambda_k g_k(\omega) e^{i(k,x)} \equiv \sum_{k\in\Lambda_n} \lambda_k g_k(\omega) e^{i(k,x)}, \tag{4.3}
$$

где для $k \in \rho(s)$

$$
\lambda_k = \lambda_{(k_1,k_2)} = \begin{cases}
1, & \text{если } [2^{s_1-1}] < k_1 < 2^{s_1},\ [2^{s_2-1}] < k_2 < 2^{s_2}, \\
1/2, & \text{если } k_1 = [2^{s_1-1}],\ [2^{s_2-1}] < k_2 < 2^{s_2}, \\
1/2, & \text{если } k_2 = [2^{s_2-1}],\ [2^{s_1-1}] < k_1 < 2^{s_1}, \\
1/4, & \text{если } k_1 = [2^{s_1-1}],\ k_2 = [2^{s_2-1}],
\end{cases}
$$

и $\Lambda_n = \bigcup_{s\in Y_n^2} \rho(s)\cap\mathbb{Z}_+^2$. Отметим, что $|\Lambda_n| \asymp n\,2^n$ и $|\Lambda_n| \leqslant \left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot 2^{n-2}$.

Утверждение теоремы 4.1 мы получим, установив оценки сверху и снизу для вероятности

$$\gamma(w) \equiv \mathsf{P}\bigl\{\|P(x,\omega)\|_{C_x} < w|\Lambda_n|^{1/2}\bigr\}$$

для значений w из области $0 < w \leqslant n^{1/2}$. Положим

$$\delta_s(x,\omega) = \sum_{k\in\rho(s)\cap\mathbb{Z}_+^2} \lambda_k g_k(\omega)e^{ikx}, \qquad s\in Y_n^2.$$

В силу неравенства (1.3), установленного в [2],

$$\gamma(w) \leqslant \mathsf{P}\Bigl\{\sum_{s\in Y_n^2} \|\delta_s(x,\omega)\|_{L_1} < A^{-1}w|\Lambda_n|^{1/2}\Bigr\}. \tag{4.4}$$

Правая часть в (4.4) в силу неравенства Чебышёва не превосходит

$$\binom{m}{[m/2]} \max_{\{s^j,\,1\leqslant j\leqslant m/2\}\subset Y_n^2} \mathsf{P}\Bigl\{\|\delta_{s^j}\|_{L_1} < \frac{2A^{-1}w}{m}\,|\Lambda_n|^{1/2},\ 1\leqslant j\leqslant m/2\Bigr\}, \tag{4.5}$$

где $m = |Y_n^2| = n/2+1$.

Из (4.4) и (4.5), пользуясь независимостью случайных величин $\|\delta_s(x,\omega)\|_{L_1}$, $s\in Y_n^2$, мы находим

$$\gamma(w) \leqslant 2^{n/2}\Bigl[\max_{s\in Y_n^2} \mathsf{P}\Bigl\{\|\delta_s(x,\omega)\| \leqslant \frac{4A^{-1}w}{n}\,|\Lambda_n|^{1/2}\Bigr\}\Bigr]^{n/4}. \tag{4.6}$$

Оценим сверху при фиксированном $s=(s_1,n-s_1)\in Y_n^2$, $0<s_1<n$, вероятность

$$\mathsf{P}\Bigl\{\|\delta_s\|_{L_1} \leqslant \frac{4A^{-1}w}{n}\,|\Lambda_n|^{1/2}\Bigr\} \leqslant \mathsf{P}\Bigl\{\|\delta_s\|_{L_1} \leqslant \frac{2^{n/2+1}}{n^{1/2}}\cdot A^{-1}w\Bigr\}. \tag{4.7}$$

Имеем для $s=(s_1,n-s_1)\in Y_n^2$, отделяя действительную часть,

$$\begin{aligned}|\delta_s(x,\omega)| &= \Biggl|\sum_{k_1=0}^{2^{s_1-1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{n-s_1-1}-1} \lambda'_k g_k(\omega)e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}\Biggr| \\ &\geqslant \Biggl|\sum_{k_1=0}^{2^{s_1-1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{n-s_1-1}-1} \lambda'_k g_k(\omega)\bigl(\cos(k_1x_1)\cos(k_2x_2)-\sin(k_1x_1)\sin(k_2x_2)\bigr)\Biggr|\end{aligned} \tag{4.8}$$

где $\lambda'_{(k_1,k_2)} \equiv \lambda_{(k_1+[2^{s_1-1}],k_2+[2^{n-s_1-1}])}$.

Пользуясь четностью косинусов и нечетностью синусов из последнего соотношения выводим:

$$\mathsf{P}\left\{\|\delta_s\|_{L_1} \leqslant \frac{2^{n/2+1}}{n^{1/2}} A^{-1}w\right\}$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left\{\left\|\sum_{k_1=0}^{2^{s_1-1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{n-s_1-1}-1} \lambda'_k g_k(\omega)\cos(k_1x_1)\cos(k_2x_2)\right\|_{L_1} \leqslant \frac{2^{n/2+2}}{n^{1/2}} A^{-1}w\right\}$$
$$\equiv \mathsf{P}\left\{\|\delta'_s\|_{L_1} \leqslant \frac{2^{n/2+2}}{n^{1/2}} A^{-1}w\right\}. \tag{4.9}$$

Рассмотрим для данного $s = (s_1, n - s_1)$ набор точек

$$\Delta_s = \left\{\frac{2\pi j_1}{2^{s_1}-1}, \frac{2\pi j_2}{2^{n-s_1}-1}\right\}, \qquad 0 \leqslant j_1 \leqslant 2^{s_1} - 2, \quad 0 \leqslant j_2 \leqslant 2^{n-s_1} - 2.$$

В силу известного результата Марцинкевича (см. [19; с. 181])

$$\|\delta'_s\|_{L_1} \geqslant \frac{c}{2^n} \sum_{z\in\Delta_s} |\delta'_s(z)|, \qquad c > 0,$$

поэтому

$$\mathsf{P}\left\{\|\delta'_s\|_{L_1} \leqslant \frac{2^{n/2+2}A^{-1}w}{n^{1/2}}\right\} \leqslant \mathsf{P}\left\{\omega : \frac{1}{2^n}\sum_{z\in\Delta_s} |\delta_s(z,\omega)| \leqslant \frac{2^{n/2}}{n^{1/2}} c_1 w\right\}. \tag{4.10}$$

Пусть $z = (z_1, z_2) \in \Delta_s$, $v = (v_1, v_2) \in \Delta_s$, причем $0 < z_1, z_2, v_1, v_2 < \pi$. Тогда

$$\sum_{k_1=0}^{2^{s_1-1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{n-s_1-1}-1} \lambda'_k \cos(k_1z_1)\cos(k_2z_2)\cos(k_1v_1)\cos(k_2v_2)$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{если } z \neq v, \\ \dfrac{(2^{s_1-1} - 1/2)(2^{n-s_1-1} - 1/2)}{4}, & \text{если } z = v. \end{cases} \tag{4.11}$$

Действительно, левая часть в (4.11) равна

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k_1=1}^{2^{s_1-1}-1} \cos(k_1z_1)\cos(k_1v_1)\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k_2=1}^{2^{n-s_1-1}-1} \cos(k_2z_2)\cos(k_2v_2)\right)$$

и нам остается учесть, что при $z = 2\pi j/(2p+1)$, $v = 2\pi j'/(2p+1)$, $0 < z, v < \pi$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{p} \cos(k_1z_1)\cos(k_1v_1) = \begin{cases} \dfrac{p+1/2}{2}, & z_1 = v_1, \\ 0, & z_1 \neq v_1. \end{cases}$$

Из (4.11) и известного свойства нормального распределения (см. [1; с. 48, теорема 2.10]) мы заключаем, что случайный вектор

$$\{\delta_s(z,\omega),\ z=(z_1,z_2)\in\Delta_s,\ 0<z_1,z_2<\pi\}$$

также имеет нормальное распределение, его координаты независимы, их среднее значение равно нулю, а дисперсия $\geqslant c_3'2^n$, $c_3'>0$. Следовательно (см. также (4.9)),

$$\mathsf{P}\left\{\|\delta_s'\|_{L_1}\leqslant\frac{2^{n/2+2}A^{-1}w}{n^{1/2}}\right\}\leqslant\mathsf{P}\left\{\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^{n-5}}|g_k(\omega)|\leqslant\frac{c_4w}{n^{1/2}}\right\}$$
$$\leqslant 2^{2^{n-5}}\left[\mathsf{P}\left\{|g_1|\leqslant\frac{c_4w\cdot 2}{n^{1/2}}\right\}\right]^{2^{n-6}}\leqslant\left(\frac{c_5w}{n^{1/2}}\right)^{2^{n-6}},$$

если $w\leqslant c_6n^{1/2}$, где постоянная $c_6>0$ достаточно мала. В итоге (см. также (4.6), (4.8)) имеем

$$\gamma(w)\leqslant\left(\frac{c_7w}{n^{1/2}}\right)^{n\cdot 2^{n-8}},\qquad w\leqslant c_6n^{1/2}.\tag{4.12}$$

Пусть теперь при некотором $\Omega\subset[0,2\pi]^2$ имеет место (4.1). Тогда очевидно, что при каждом w

$$\gamma(w)\geqslant\mathsf{P}\left\{\max_{x\in\Omega}|P(x,\omega)|<|\Lambda_n|^{1/2}\frac{w}{y}\right\}.\tag{4.13}$$

Оценим снизу правую часть в (4.13). Введем в рассмотрение случайный вектор размерности $2|\Omega|$: $\{r_x,r_x',\ x\in\Omega\}$ с

$$r_x=\operatorname{Re}P(x,\omega),\qquad r_x'=\operatorname{Im}P(x,\omega).$$

Тогда

$$\mathsf{P}\left\{\max_{x\in\Omega}|P(x,\omega)|<|\Lambda_n|\frac{w}{y}\right\}\geqslant\mathsf{P}\left\{\max_{x\in\Omega}\max\bigl(|r_x|,|r_x'|\bigr)<\left(\frac{|\Lambda_n|}{2}\right)^{1/2}\frac{w}{y}\right\}.\tag{4.14}$$

Вектор $\{r_x,r_x',\ x\in\Omega\}$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и по теореме Шидака [20] (см. также следствие 1 в [21]) правая часть в (4.14) допускает оценку снизу величиной

$$\Pi=\prod_{x\in\Omega}\left(\mathsf{P}\left\{|r_x|<\left(\frac{|\Lambda_n|}{2}\right)^{1/2}\frac{w}{y}\right\}\cdot\mathsf{P}\left\{|r_x'|<\left(\frac{|\Lambda_n|}{2}\right)^{1/2}\frac{w}{y}\right\}\right).\tag{4.15}$$

Оценим снизу произведение (4.15) при $w=c_6n^{1/2}$. Так как для любого $x\in\Omega$

$$(\mathsf{E}|r_x|^2)^{1/2}\leqslant|\Lambda_n|^{1/2},\qquad(\mathsf{E}|r_x'|^2)^{1/2}\leqslant|\Lambda_n|^{1/2},$$

то

$$\Pi \geqslant \left(1 - 2\int_{c_9 n^{1/2}/y}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right)^{2|\Omega|} \geqslant \exp\bigl[-4|\Omega|\exp\bigl(-c_9^2 n/(2y^2)\bigr)\bigr]; \qquad (4.16)$$

мы использовали неравенство

$$1 - 2\int_z^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \geqslant \exp\bigl(-2\exp(-z^2/2)\bigr), \qquad z \geqslant 1,$$

и считали, что $y < c_9 n^{1/2}$. Итак (см. (4.13)–(4.16)),

$$\gamma(c_6 n^{1/2}) \geqslant \exp\bigl[-4|\Omega|\exp(-c_{10}n/y^2)\bigr]. \qquad (4.17)$$

Сравнивая (4.17) и неравенство (4.12) при $w = c_6 n^{1/2}$, мы находим:

$$c_{11}^{n2^n} \geqslant \exp\bigl[-4|\Omega|\exp(-c_{10}n/y^2)\bigr],$$

то есть

$$|\Omega| \geqslant c_{12} n 2^n \exp(c_{10}n/y^2).$$

Соотношение (4.2), а значит и теорема 4.1 доказаны.

Утверждение следствия 4.1, сформулированного во введении, при $d = 2$ непосредственно вытекает из теоремы 4.1.

Утверждение следствия 4.1 при $d > 2$ и $\alpha = 1/2$ очевидно, а при $\alpha < 1/2$ вытекает из двумерного результата если учесть, что

$$|Q_n^d| \ll |Q_n^2| \cdot \exp(cn^{\varepsilon})$$

для произвольных $c > 0$ и $\varepsilon > 0$ и подпространство в $\mathcal{T}(Q_n^d)$ полиномов, зависящих от двух координат, совпадает с $\mathcal{T}(Q_n^2)$.

§ 5. Заключительные замечания

а) Приведем построение полиномов $t_k \in \mathcal{T}_r(2^k)$, $k = 1, 2, \dots$, для которых $\|t_k\|_\infty \geqslant c_1 k^{1/2} \|t_k\|_{QC}$, $c_1 > 0$ (существование таких примеров отмечалось во введении). Пусть для данного k

$$f(x) = \sum_{s=0}^{k-1} 2^{-s} \sum_{j=2^s}^{2^{s+1}-1} e^{ijx}$$

и $t_k = \operatorname{Re} f$. Ясно, что $f(0) = t_k(0) = k$. Покажем, что $\|f\|_{QC} \ll k^{1/2}$, а значит, в силу неравенства $\|t_k\|_{QC} \leqslant \|f\|_{QC}$, и $\|t_k\|_{QC} \ll k^{1/2}$.

Определим функцию

$$g_\omega(x) = \sum_{s=0}^{k-1} r_s(\omega)\chi_{[-2^{-s},2^{-s}]}(x).$$

Тогда для любого ω

$$\|f_\omega(x) - g_\omega(x)\|_\infty \ll 1, \qquad f_\omega(x) = \sum_{s=0}^{\infty} r_s(\omega)\delta_s(f,x).$$

В самом деле, пусть $2^{-l-1} < |x| \leqslant 2^{-l}$, $l \leqslant k$. Имеем

$$|f_\omega(x) - g_\omega(x)| \ll \sum_{s=0}^{l} 2^{-s} \sum_{j=2^s}^{2^{s+1}-1} |1 - e^{ijx}| + \sum_{s>l} \frac{2^{-s}}{x} \ll 1.$$

При $|x| < 2^{-k-1}$ аналогично

$$|f_\omega(x) - g_\omega(x)| \leqslant \sum_{s=0}^{k} 2^{-s} \sum_{j=2^s}^{2^{s+1}-1} |1 - e^{ijx}| \ll 1.$$

Далее, оценка

$$\int_0^1 \|g_\omega(x)\|_\infty \, d\omega \ll \sqrt{k}$$

вытекает из оценки мажоранты частных сумм полинома по системе Радемахера $\sum\limits_{s=0}^{k-1} r_s(\omega)$ (см. [1; теорема 2.9]).

б) Рассматривая QC норму в многомерном случае, мы определяли ее следующим образом:

$$\|f(x_1,\dots,x_d)\|_{QC} = \Big\| \|f(\,\cdot\,,x_2,\dots,x_d)\|_{QC} \Big\|_\infty,$$

т.е. брали QC норму фактически только по переменной x_1. Возможны и другие варианты, когда усреднение по знакам берется и по другим переменным. Рассмотрим два таких способа:

$$\|f\|^T_{QC} \equiv \int_{[0,1]^d} \Big\| \sum_s r_{s_1}(\omega_1)\cdot\ldots\cdot r_{s_d}(\omega_d)\, \delta_{(s_1,\dots,s_d)}(f,x) \Big\|_\infty d\omega, \tag{5.1}$$

$$\|f\|^*_{QC} \equiv \int_0^1 \Big\| \sum_s r_{i(s)}(\omega)\, \delta_s(f) \Big\|_\infty d\omega, \tag{5.2}$$

где i задает взаимнооднозначное соответствие между $\mathbb{Z}^d_+$ и $\mathbb{N}$.

Из доказательства оценок сверху в теоремах 3.1 и 3.2 следует, что те же оценки сохраняются и для норм (5.1), (5.2). Из теоремы 2.2 нетрудно вывести ее аналоги для норм (5.1) и (5.2), что, в свою очередь, влечет для этих норм те же оценки снизу, что и оценки для QC нормы, установленные в теоремах 3.1, 3.2.

Отметим еще, что в некоторых случаях работать с нормой $\|\cdot\|_{QC}^*$ проще, чем с $\|\cdot\|_{QC}$.

в) Приведем один результат, связанный с теоремой 2.2. Эта теорема была выведена в § 2 из одномерного результата – теоремы 2.1 при помощи сравнительно элементарной техники: использовались теорема Литтлвуда–Пэли и неравенство Гёльдера. В дипломной работе П. Г. Григорьева для исследования полиномов многих переменных были привлечены результаты С. В. Бочкарева [22]. Аналогично, с помощью результатов из [22] из теоремы 2.1 можно вывести следующее

Утверждение. *Пусть*

$$\|f\|_{QC,L} \equiv \big\|\|f(\,\cdot\,,x^1)\|_{QC}\big\|_{L_1}$$

и

$$\rho^+(s) = \rho(s) \cap \mathbb{Z}_+^d.$$

Для любых $t_s \in \mathscr{T}(\rho^+(s))$ *имеет место неравенство*

$$\Big\|\sum_{s\in Y_n^d} t_s\Big\|_{QC,L} \geqslant c(d)\cdot n^{-(d/2-1)} \sum_{s\in Y_n^d} \|t_s\|_1, \qquad c(d) > 0.$$

г) Следствие 4.1 показывает, что свойства подпространства $\mathscr{T}(\Delta Q_n)$ в пространстве $\mathscr{T}([-2^n,2^n]^d)$ в определенном смысле аналогичны свойствам случайного подпространства в $\mathscr{T}([-2^n,2^n]^d)$ той же размерности (см. также [23]).

Список литературы

[1] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.

[2] Temlyakov V. N. An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the entropy numbers // J. Complexity. 1995. V. 11. P. 293–307.

[3] Talagrand M. The small ball problem for the Brownian sheet // Ann. Probab. 1994. V. 22. P. 1331–1354.

[4] Григорьев П. Г. Об одной последовательности тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №6. С. 935–938.

[5] Кашин Б. С., Темляков В. Н. Об одной норме и связанных с ней приложениях // Матем. заметки. 1998. Т. 64. №4. С. 637–640.

[6] Темляков В. Н. Оценки наилучших билинейных приближений функций и аппроксимативных чисел интегральных операторов // Матем. заметки. 1992. Т. 51. №5. С. 125–134.

[7] Кашин Б. С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов с равномерной нормой // Труды МИАН. 1980. Т. 145. С. 111–116.

[8] Pisier G. The volume of convex bodies and Banach space geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.

[9] Temlyakov V. N. An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the Kolmogorov widths // East J. Approx. 1996. V. 2. №2. P. 253–262.

[10] Lorentz G. G. Metric entropy and approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1966. V. 72. P. 903–937.

[11] Кашин Б. С., Темляков В. Н. Об оценке аппроксимативных характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Матем. заметки. 1995. Т. 58. №6. С. 922–925.

[12] Темляков В. Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Труды МИАН. 1989. Т. 189. С. 138–168.

[13] Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН. 1986. Т. 178.

[14] Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.

[15] Pajor A., Tomczak-Jaegermann N. Subspaces of small codimension of finite-dimensional Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. V. 97. №4. P. 637–642.

[16] Belinskiy E. S. Estimates of entropy numbers and Gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative // J. Approx. Theory. 1998. V. 93. №1. P. 114–127.

[17] Schütt C. Entropy numbers of diagonal operators between symmetric Banach spaces // J. Approx. Theory. 1984. V. 40. P. 121–128.

[18] Белинский Э. С. Асимптотические характеристики классов функций с условием на смешанную производную (смешанную разность) // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль, 1990. С. 22–37.

[19] Marcinkiewicz J. Collected papers. Warszawa: PWN, 1964.

[20] Šidak Z. Rectangular confidence regions for the means of multivariate normal distributions // J. Amer. Statist. Assoc. 1967. V. 62. P. 626–633.

[21] Глускин Е. Д. Экстремальные свойства ортогональных параллелепипедов и их приложения к геометрии банаховых пространств // Матем. сб. 1988. Т. 136 (178). №1. С. 85–96.

[22] Бочкарев С. В. Ряды Валле-Пуссена в пространствах BMO, L_1 и $H^1(D)$, и мультипликативные неравенства // Труды МИАН. 1995. Т. 210. С. 41–64.

[23] Кашин Б. С. О свойствах случайных сечений N-мерного куба // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1983. №3. С. 8–11.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
The University of South Carolina
E-mail: `kashin@mi.ras.ru` `temlyak@math.sc.edu`

Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. С. 101–111

О равномерно сходящихся перестановках тригонометрических рядов Фурье

С. В. Конягин

Установлено, что если модуль непрерывности $\omega(f,\delta)$ 2π-периодической функции $f \in C(\mathbb{T})$ есть $o(1/\log\log 1/\delta)$ при $\delta \to 0+$, то некоторая перестановка тригонометрического ряда Фурье функции f сходится к ней равномерно.

Библиография: 9 названий.

§ 1. Введение

П. Л. Ульянов [1; с. 58] поставил следующую задачу. Верно ли, что тригонометрический ряд Фурье любой 2π-периодической непрерывной функции можно переставить так, чтобы переставленный ряд сходился к f равномерно? Ответ на этот вопрос до сих пор не известен. С. Г. Ревеш [2] доказал, что существует равномерно сходящаяся подпоследовательность частных сумм переставленного ряда Фурье; при этом, вообще говоря, перестановка и подпоследовательность зависят от f. В [3] этот результат был распространен на случай многомерных рядов Фурье непрерывных функций. В настоящей работе мы даем положительный ответ на вопрос П. Л. Ульянова в случае, когда модуль непрерывности $\omega(f,\delta)$ функции f есть $o(1/\log\log 1/\delta)$ при $\delta \to 0+$.

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ – одномерный тор, $C(\mathbb{T})$ – пространство комплексных функций, непрерывных на $\mathbb{T}$. Каждой функции $f \in C(\mathbb{T})$ сопоставляется ее ряд Фурье в комплексной и действительной формах:

$$f \sim \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikx} \quad \text{и} \quad f \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cos(kx+\varphi_k).$$

Для сокращения записи обозначим $A_k(x) = d_k\cos(kx+\varphi_k)$. Как обычно, $\omega(f,\delta) = \max\limits_{\substack{x,y\in\mathbb{T}\\ |x-y|\leqslant\delta}} |f(x)-f(y)|$, где $\delta \geqslant 0$, есть модуль непрерывности функции f в $C(\mathbb{T})$. Для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00378) и программы "Ведущие научные школы" (проект № 96-15-96072).

$f \in C(\mathbb{T})$ положим $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{T}} |f(x)|$. Через $C_1, C_2, \ldots$ мы обозначаем абсолютные положительные постоянные.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C(\mathbb{T})$ *и* $\omega(f,\delta) = o(1/\log\log 1/\delta)$ *при* $\delta \to 0+$. *Тогда существует такая перестановка* σ *множества натуральных чисел, что*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - d_0 - \sum_{k=1}^{n} A_{\sigma(k)} \right\| = 0.$$

В теореме 1 речь идет о перестановках рядов Фурье в действительной форме. Однако, соответствующее утверждение для рядов Фурье в комплексной форме сразу следует из теоремы 1, утверждение которой можно переписать в виде

$$\left\| f - c_0 - \sum_{k=1}^{n} \left(c_{\sigma(k)} e^{ikx} + c_{-\sigma(k)} e^{-ikx} \right) \right\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Теорема 1 немедленно вытекает из следующих двух теорем, которые мы и будем доказывать.

Теорема 2. *Пусть неубывающая положительная функция* $B(u)$ *удовлетворяет условиям*:

1) $B(n^2) = O(B(n))$ *при* $n \in \mathbb{N}$;
2) *для любого тригонометрического полинома* $T(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k(x)$ *найдется такая перестановка* τ *множества* $\{0, \ldots, n\}$, *что для любого* $m = 0, \ldots, n$

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} A_{\tau(k)} \right\| \leqslant B(n)\|T\|.$$

Тогда для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ *такой, что* $\omega(f,\delta) = o(1/B(1/\delta))$ *при* $\delta \to 0+$, $f \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(x)$, *найдется такая перестановка* σ *множества натуральных чисел, что*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - d_0 - \sum_{k=1}^{n} A_{\sigma(k)} \right\| = 0.$$

Теорема 3. *Функция* $B(u) = C_1 \log\log(u+3)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.

Доказательство теоремы 1 позволяет для всякого модуля непрерывности $\omega(\delta) = o(1/\log\log 1/\delta)$ $(\delta \to 0+)$ построить такую последовательность $\varepsilon_n \to 0$

$(n \to \infty)$, что для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ такой, что $\omega(f,\delta) \leqslant \omega(\delta)$ при $\delta \geqslant 0$, найдется перестановка $\sigma\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, удовлетворяющая условию

$$\left\| f - d_0 - \sum_{k=1}^{n} A_{\sigma(k)} \right\| \leqslant \varepsilon_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Например, если $\omega(\delta) = O(\omega(\delta^2))$, то можно взять $\varepsilon_n = O(\omega(f, 1/n)\log\log(n+3))$. Однако, мы не знаем, верно ли это для любого модуля непрерывности $\omega(\delta)$. С другой стороны, не исключена возможность того, что для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ найдется такая перестановка $\sigma\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, что при всех $n \in \mathbf{N}$

$$\left\| f - d_0 - \sum_{k=1}^{n} A_{\sigma(k)} \right\| = O\Bigl(\omega\Bigl(f, \frac{1}{n}\Bigr)\Bigr).$$

Результаты работы анонсированы в [4].

§ 2. Доказательство теоремы 2

Доказательство основано на идеях работы [2]. Для $f \in C(\mathbb{T})$ и натуральных n и m через $S_n(f)$ мы обозначаем частную сумму Фурье функции f

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k,$$

а через $V_{n,m}(f)$ – сумму Валле-Пуссена

$$V_{n,m}(f) = \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{n+m-1} S_k(f).$$

Следующая лемма является переформулировкой леммы 2 работы [2] на случай комплексных функций.

Лемма 1. *Пусть* $f \in C(\mathbb{T})$, $\eta > 0$, $n > 7$, $m \leqslant n$. *Если*

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} |d_k|^2 < \frac{\eta}{\log n}, \tag{1}$$

то найдется набор $(\omega_1, \dots, \omega_m) \in \{0,1\}^m$ *такой, что*

$$\left\| S_n(f) + \sum_{k=1}^{m} \omega_k A_{n+k} - V_{n,m}(f) \right\| < 12\sqrt{\eta}. \tag{2}$$

В [2] при доказательстве соответствующего утверждения для действительных функций f набор $(\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \{0,1\}^m$ рассматривался в качестве случайного и было показано, что при надлежащем выборе вероятностного пространства вероятность события

$$\left\| S_n(f) + \sum_{k=1}^{m} \omega_k A_{n+k} - V_{n,m}(f) \right\| \geqslant 8\sqrt{\eta}$$

не превосходит $26n^{-2}$. Следовательно, для комплексной функции f, каждое из событий

$$\left\| S_n(\operatorname{Re} f) + \sum_{k=1}^{m} \omega_k \operatorname{Re} A_{n+k} - V_{n,m}(\operatorname{Re} f) \right\| \geqslant 8\sqrt{\eta},$$

$$\left\| S_n(\operatorname{Im} f) + \sum_{k=1}^{m} \omega_k \operatorname{Im} A_{n+k} - V_{n,m}(\operatorname{Im} f) \right\| \geqslant 8\sqrt{\eta}$$

произойдет с вероятностью не более $26n^{-2}$. Но тогда при $n > 7$ с положительной вероятностью $\geqslant 1 - 52n^{-2}$ ни одно из этих двух событий не произойдет, и (2) будет выполнено.

Лемма 2. *Для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ существуют подмножества $N_0, N_1, \ldots$ множества натуральных чисел такие, что $N_0 = \varnothing$,*

$$\{1, \ldots, 2^{2^{l-1}}\} \subset N_l \subset \{1, \ldots, 2^{2^l}\},$$

и

$$\left\| f - d_0 - \sum_{k \in N_l} A_k \right\| \leqslant C_2 \omega\left(f, \frac{1}{2^{2^{l-1}}}\right)$$

при всех $l \in \mathrm{N}$.

Доказательство. Для $l = 1$ и $l = 2$ множества N_l могут быть взяты достаточно произвольным образом, например, $N_l = \{1, \ldots, 2^{2^{l-1}}\}$. Легко проверить, что утверждение леммы для этих значений l будут выполнены. Пусть теперь $l \geqslant 3$. Для $\delta \geqslant 0$

$$\omega(f, \delta)_2 = \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x+h) - f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

обозначает модуль непрерывности функции f в $L^2(\mathbb{T})$. Применяя теорему Джексона в $L^2(\mathbb{T})$ (см., например, [5; с. 159]) и учитывая, что наилучшие приближения в $L^2(\mathbb{T})$ задаются частными суммами Фурье, мы получаем

$$\sum_{k > 2^{2^{l-1}}} |d_k|^2 \leqslant C_3 \omega\left(f, \frac{1}{2^{2^{l-1}}}\right)_2^2 \leqslant 2\pi C_3 \omega\left(f, \frac{1}{2^{2^{l-1}}}\right)^2.$$

Значит, найдется $j \in \{0, \dots, 2^{l-1} - 1\}$ такое, что при $n = 2^{2^{l-1}+j}$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} |d_k|^2 \leqslant 4\pi C_3 \frac{\omega(f, 1/2^{2^{l-1}})^2}{2^l} \leqslant C_4 \frac{\omega(f, 1/2^{2^{l-1}})^2}{\log n}.$$

Применяя лемму 1 в случае $m = n$, $\eta = C_4\omega(f, 1/2^{2^{l-1}})^2$ и полагая

$$N_l = \{k \in \mathrm{N} : k \leqslant n\} \cup \{n + k : 0 < k \leqslant n,\ \omega_k = 1\},$$

мы находим

$$\Bigl\|V_{n,n}(f) - d_0 - \sum_{k\in N_l} A_k\Bigr\| \leqslant C_5\omega\Bigl(f, \frac{1}{2^{2^{l-1}}}\Bigr). \tag{3}$$

Далее, в силу теоремы Джексона в $C(\mathbb{T})$ [5; с. 159] и оценки приближения суммами Валле-Пуссена через наилучшие приближения [5; с. 117],

$$\|f - V_{n,n}(f)\| \leqslant C_6\omega\Bigl(f, \frac{1}{n}\Bigr) \leqslant C_6\omega\Bigl(f, \frac{1}{2^{2^{l-1}}}\Bigr). \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает утверждение леммы 2.

Заметим, что из условия на множества N_l в лемме 2 непосредственно следует, что $N_0 \subset N_1 \subset \cdots$ и $\bigcup_{l\in\mathrm{N}} N_l = \mathrm{N}$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$ и $\omega(f,\delta) = o(1/B(1/\delta))$ при $\delta \to 0+$. Обозначим

$$T_l = \sum_{k\in N_l\setminus N_{l-1}} A_k,$$

тогда

$$f = d_0 + \sum_l T_l. \tag{5}$$

При этом ряд в правой части (5) сходится равномерно, ибо в силу леммы 2

$$\Bigl\|f - d_0 - \sum_{l=1}^{L} T_l\Bigr\| = O\Bigl(\omega\Bigl(\frac{1}{2^{2^{L-1}}}\Bigr)\Bigr). \tag{6}$$

Далее, с учетом условия 1) теоремы 2, мы имеем

$$\|T_l\| \leqslant C_2\Bigl(\omega\Bigl(f, \frac{1}{2^{2^{l-1}}}\Bigr) + \omega\Bigl(f, \frac{1}{2^{2^l}}\Bigr)\Bigr) = o\Bigl(\frac{1}{B(2^{2^{l-1}})}\Bigr) = o\Bigl(\frac{1}{B(2^{2^l})}\Bigr). \tag{7}$$

Через n_l обозначим количество элементов во множестве N_l. По условию теоремы 2, учитывая, что степень полинома T_l не превосходит 2^{2^l}, существует биективное отображение σ_l множества $\{n_{l-1}+1,\dots,n_l\}$ на $N_l \setminus N_{l-1}$ такое, что для любого $m = n_{l-1}+1,\dots,n_l$ справедливо неравенство

$$\left\|\sum_{k=n_{l-1}+1}^{m} A_{\sigma_l(k)}\right\| \leqslant B(2^{2^l})\|T_l\|,$$

откуда и из (7) следует, что

$$\max_{n_{l-1}<m\leqslant n_l}\left\|\sum_{k=n_{l-1}+1}^{m} A_{\sigma_l(k)}\right\| = o(1) \qquad (l\to\infty). \tag{8}$$

Построим теперь перестановку σ множества $\mathbf{N}$, полагая $\sigma(k)=\sigma_l(k)$ при $k\in\{n_{l-1}+1,\dots,n_l\}$. Тогда для любого $n\in\mathbf{N}$, подбирая такое L, что $n\in\{n_{L-1}+1,\dots,n_L\}$, имеем

$$\begin{aligned}\left\|f-d_0-\sum_{k=1}^{n}A_{\sigma(k)}\right\| &= \left\|f-d_0-\sum_{l=1}^{L-1}T_l-\sum_{k=n_{L-1}+1}^{n}A_{\sigma(k)}\right\|\\ &\leqslant \left\|f-d_0-\sum_{l=1}^{L-1}T_l\right\| + \left\|\sum_{k=n_{L-1}+1}^{n}A_{\sigma(k)}\right\|,\end{aligned}$$

и в силу (6) и (8),

$$\left\|f-d_0-\sum_{k=1}^{n}A_{\sigma(k)}\right\| \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Теорема доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Нам нужно показать, что если $n\in\mathbf{N}$,

$$T(x)=\sum_{k=0}^{n}A_k(x)=\sum_{k=0}^{n}d_k\cos(kx+\varphi_k)$$

является тригонометрическим полиномом степени не выше n и

$$\|T\|\leqslant 1, \tag{9}$$

то найдется такая перестановка τ множества $\{0,\dots,n\}$, что для любого $m = 0,\dots,n$

$$\left\|\sum_{k=0}^{m}A_{\tau(k)}\right\| \leqslant C_1\log\log(n+3). \tag{10}$$

Идея доказательства теоремы состоит в том, что мы выберем нечетное простое p и члены A_k полинома T разобьем на пачки, относя к j-й пачке $\left(j = 0, \dots, \frac{p-1}{2}\right)$ все A_k, для которых $k \equiv \pm j \pmod p$. Пачки мы суммируем в "естественном" порядке, а внутри каждой пачки упорядочиваем слагаемые случайным образом. Будет показано, что при правильно выбранном простом p полученное упорядочивание будет давать нужный результат.

Вначале оценим нормы каждой пачки и сумм по пачкам. Условие (9) будет всюду предполагаться выполненным.

Лемма 3. *Пусть p – нечетное простое число. Тогда*

1) *для любого $j = 0, \dots, \frac{p-1}{2}$*

$$\left\| \sum_{k \equiv \pm j \pmod p} A_k \right\| \leqslant 2;$$

2) *для любого $J = 0, \dots, \frac{p-1}{2}$*

$$\left\| \sum_{j=0}^{J} \sum_{k \equiv \pm j \pmod p} A_k \right\| \leqslant C_7 \log p.$$

Доказательство. Наряду с "действительными" пачками мы будем рассматривать "комплексные" пачки

$$T_j(x) = \sum_{k \equiv j \pmod p} c_k e^{ikx} \qquad \left(|j| \leqslant \frac{p-1}{2}\right),$$

где c_k – коэффициенты разложения полинома T, записанного в комплексной форме

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Мы имеем

$$\sum_{k \equiv 0 \pmod p} A_k = T_0, \tag{11}$$

$$\sum_{k \equiv \pm j \pmod p} A_k = T_j + T_{-j} \quad \left(j = 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right). \tag{12}$$

Фиксируем $x_0 \in \mathbb{T}$ и обозначим $x_l = x_0 + \frac{2\pi l}{p}$ $\left(|l| \leqslant \frac{p-1}{2}\right)$. Легко видеть, что разложение $T = \sum\limits_j T_j$ индуцирует дискретное разложение Фурье полинома T на сетке $\left\{x_l : |l| \leqslant \frac{p-1}{2}\right\}$. При этом

$$T_j(x_0) = \frac{1}{p} \sum_{|l| \leqslant \frac{p-1}{2}} e^{-2\pi i j l/p} T(x_l) \qquad \left(|j| \leqslant \frac{p-1}{2}\right). \tag{13}$$

Значит, $|T_j(x_0)| \leqslant 1$, и в силу произвольности выбора $x_0 \in \mathbb{T}$ мы имеем $\|T_j\| \leqslant 1$. Отсюда и из (11) и (12) следует первое утверждение леммы.

Второе утверждение доказывается стандартным образом с использованием дискретных ядер Дирихле: с учетом (11), (12) и (13), для всякого $J = 0, \dots, \frac{p-1}{2}$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=0}^{J} \sum_{k \equiv \pm j \pmod p} A_k(x_0)\right| &= \left|\sum_{j=-J}^{J} T_j(x_0)\right| \\ &= \left|\frac{1}{p} \sum_{|l| \leqslant \frac{p-1}{2}} \left(\sum_{j=-J}^{J} e^{-2\pi i j l/p}\right) T(x_l)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{p} \sum_{|l| \leqslant \frac{p-1}{2}} \left|\sum_{j=-J}^{J} e^{-2\pi i j l/p}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{p}\left(2J + 1 + \sum_{1 \leqslant |l| \leqslant \frac{p-1}{2}} \frac{1}{\sin(\pi |l|/p)}\right) \leqslant C_7 \log p.\end{aligned}$$

Лемма 3 показывает, что нормы сумм по пачкам ограничены величиной порядка $\log\log(n+3)$, если p не превосходит фиксированной степени $\log(n+3)$. Выбор простого числа p осуществляется с помощью следующей леммы.

Лемма 4. *Существует нечетное простое число $p \leqslant 2\log^3(n+3)$ такое, что*

$$\sum_{\substack{k_1 \neq k_2 \\ k_1 \equiv \pm k_2 \pmod p}} |d_{k_1}|^2 |d_{k_2}|^2 \leqslant \frac{C_8}{\log^2(n+3)}.$$

Доказательство. Заметим, что из условия (9) следует, что

$$\sum_k |d_k|^2 \leqslant 2. \tag{14}$$

Пусть P – множество всех нечетных простых, не превосходящих $2\log^3(n+3)$. Учитывая (14), мы имеем

$$\begin{aligned}\sum_{p \in P} \sum_{\substack{k_1 \neq k_2 \\ k_1 \equiv \pm k_2 \pmod p}} |d_{k_1}|^2 |d_{k_2}|^2 &\leqslant \sum_{k_1 \neq k_2} |\{p \in P : k_1^2 - k_2^2 \equiv 0 \pmod p\}| \cdot |d_{k_1}|^2 |d_{k_2}|^2 \\ &\leqslant \max_{k_1 \neq k_2} |\{p \in P : k_1^2 - k_2^2 \equiv 0 \pmod p\}| \left(\sum_k |d_k|^2\right)^2 \\ &\leqslant 4 \max_{k_1 \neq k_2} |\{p \in P : k_1^2 - k_2^2 \equiv 0 \pmod p\}|.\end{aligned}$$

Если m – количество различных простых делителей числа $k_1^2 - k_2^2$ при $k_1 \neq k_2$, $0 \leqslant k_1 < n, 0 \leqslant k_2 < n$, то $m! \leqslant |k_1^2 - k_2^2| < n^2$, откуда

$$m \leqslant C_9 \frac{\log(n+3)}{\log\log(n+3)}$$

и

$$\sum_{p\in P} \sum_{\substack{k_1\neq k_2 \\ k_1\equiv\pm k_2 \pmod p}} |d_{k_1}|^2 |d_{k_2}|^2 \leqslant 4C_9 \frac{\log(n+3)}{\log\log(n+3)}\,.$$

С другой стороны, $|P| \geqslant C_{10}\log^3(n+3)/\log\log(n+3)$ (см., например, [6; с. 27]). Поэтому найдется $p \in P$ такое, что

$$\sum_{\substack{k_1\neq k_2 \\ k_1\equiv\pm k_2 \pmod p}} |d_{k_1}|^2 |d_{k_2}|^2 \leqslant \frac{4C_9}{C_{10}\log^2(n+3)}\,,$$

и лемма доказана.

Зафиксируем число p в соответствии с леммой 4 и возьмем произвольное $j \in \{0,\dots,\min(\frac{p-1}{2}, n)\}$. Среди всех чисел k, $0 \leqslant k \leqslant n$, удовлетворяющих сравнению $k \equiv \pm j \pmod p$, выберем число $k(j)$ таким образом, чтобы $|d_{k(j)}|$ принимало наибольшее значение, и пусть $N_j = \{k : k \equiv \pm j \pmod p,\ k \neq k(j)\}$. Мы имеем

$$\begin{aligned}\Bigl(\sum_{k\in N_j}|d_k|^2\Bigr)^2 &= \sum_{k\in N_j}(|d_k|^2)^2 + \sum_{\substack{k_1\neq k_2 \\ k_1\in N_j, k_2\in N_j}} 2|d_{k_1}|^2|d_{k_2}|^2 \\ &\leqslant \sum_{k\in N_j}|d_k|^2|d_{k(j)}|^2 + \sum_{\substack{k_1\neq k_2 \\ k_1\in N_j, k_2\in N_j}} 2|d_{k_1}|^2|d_{k_2}|^2,\end{aligned}$$

откуда в силу леммы 4

$$\sum_{k\in N_j}|d_k|^2 \leqslant \frac{\sqrt{2C_8}}{\log(n+3)}\,. \tag{15}$$

Обозначим теперь $n_j = |N_j|, U_j = \sum\limits_{k\in N_j} A_k$. Заметим, что в силу (14) $|d_{k(j)}| \leqslant \sqrt{2}$, поэтому из первого утверждения леммы 3 следует, что

$$\|U_j\| \leqslant 2 + \sqrt{2}. \tag{16}$$

Лемма 5. *Существует перестановка* $\tau_j = \{k_1, \ldots, k_{n_j}\}$ *множества* N_j *такая, что для любого* $m \in \{1, \ldots, n_j\}$

$$\|A_{k_1} + \cdots + A_{k_m}\| \leqslant C_{11}.$$

Теорема 3 легко следует из лемм 3–5. Требуемое упорядочивание множества $\{0, \ldots, n\}$ строится следующим образом:

$$\big\{\{\tau_0\}, k_0, \{\tau_1\}, k_1, \ldots, \{\tau_j\}, k_j, \ldots\big\}.$$

(Построение продолжается, пока $j \leqslant \min\big(\frac{p-1}{2}, n\big)$.) Для любого $m = 0, \ldots, n$ мы имеем

$$\left\|\sum_{k=0}^{m} A_{\tau(k)}\right\| \leqslant C_7 \log p + C_{11} \leqslant C_7 \log\big(2\log^3(n+3)\big) + C_{11},$$

откуда вытекает утверждение теоремы 3.

Таким образом, нам остается проверить справедливость леммы 5. Пусть ξ есть случайный вектор, компоненты которого ξ_k $(k \in N_j)$ – независимые случайные величины, каждая из которых принимает значение $+1$ и -1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Определим случайный полином

$$U_{j,\xi} = \sum_{k \in N_j} \xi_k A_k.$$

По теореме С. А. Чобаняна [7], [8] существует перестановка $\tau_j = \{k_1, \ldots, k_{n_j}\}$ такая, что для любого $m \in \{1, \ldots, n_j\}$

$$\|A_{k_1} + \cdots + A_{k_m}\| \leqslant 9(\mathsf{E}\|U_{j,\xi}\| + \|U_j\|). \tag{17}$$

Для оценки $\mathsf{E}\|U_{j,\xi}\|$ мы воспользуемся следующим неравенством [9]:

$$\mathsf{P}\left(\|U_{j,\xi}\| \geqslant \left(C_{12} \log n \sum_{k \in N_j} |d_k|^2\right)^{1/2}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Так как, кроме того, в силу (14) при любом ξ справедливо неравенство $\|U_{j,\xi}\| \leqslant \sqrt{2}n$, то

$$\mathsf{E}\|U_{j,\xi}\| \leqslant \left(C_{12} \log n \sum_{k \in N_j} |d_k|^2\right)^{1/2} + \frac{1}{n^2}\sqrt{2}n,$$

и с учетом (15) мы получаем

$$\mathsf{E}\|U_{j,\xi}\| \leqslant (2\mathrm{C}_8)^{1/4} C_{12}^{1/2} + \sqrt{2}.$$

Отсюда и из (17) и (16) вытекает утверждение леммы 5.

Список литературы

[1] Ульянов П. Л. Проблемы теории тригонометрических рядов // УМН. 1964. Т. 19. №1. С. 3–69.
[2] Révész Sz. Gy. Rearrangements of Fourier series // J. Approx. Theory. 1990. V. 60. №1. P. 101–121.
[3] Révész Sz. Gy. On the convergence of Fourier series of U.A.P functions // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 151. №2. P. 308–317.
[4] Конягин С. В. О перестановках тригонометрических рядов Фурье // Всесоюзная школа "Теория приближения функций". Тезисы докладов. Киев, 1989. С. 80.
[5] Жук В. В. Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.
[6] Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
[7] Чобанян С. А. Структура множества сумм условно сходящегося ряда в нормированном пространстве // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278. №3. С. 556–559.
[8] Чобанян С. А. Структура множества сумм условно сходящегося ряда в нормированном пространстве // Матем. сб. 1985. Т. 128. №1. С. 50–65.
[9] Кахан Ж.-П. Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. С. 113–129

О некоторых свойствах субгармонических и целых функций нулевого порядка

В. В. Напалков, В. А. Таров

В статье изучаются свойства субгармонических и целых функций нулевого порядка. Дано также полное описание замкнутых подмодулей в некоторых модулях целых функций нулевого порядка.

Библиография: 13 названий.

Введение

К настоящему времени достаточно полно изучены вопросы описания инвариантных относительно дифференцирования подпространств аналитических функций (см. [1]–[3]). Это описание благодаря специальному принципу двойственности (см. [1]) сводится к изучению замкнутых идеалов (замкнутых подмодулей) в некоторых алгебрах (модулях) целых функций, имеющих заданный рост.

При изучении инвариантных подпространств в пространствах некоторых числовых последовательностей (см. [4]) оказалось необходимым дополнительное исследование свойств субгармонических функций нулевого порядка. Некоторые свойства субгармонических функций нулевого порядка, в частности логарифмов модулей целых функций нулевого порядка, изучаются в § § 1 и 2 этой статьи.

Опираясь на свойства целых функций нулевого порядка, в § 3 статьи дано полное описание замкнутых подмодулей в некоторых модулях целых функций нулевого порядка и показано, что всякий нетривиальный замкнутый подмодуль в некоторых модулях однозначно определяется своим нулевым множеством и является главным. Этот результат обобщает работу [5] и дает возможность описания инвариантных подпространств в некоторых пространствах числовых последовательностей по аналогии с работой [4].

Введем обозначения. $u \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(u)$ – субгармоническая функция нулевого порядка; $M_\varphi(r) = \sup\{\varphi^+(u) : |u| \leqslant r\}$, $\varphi^+(u) = \max\{\varphi(u), 0\}$; μ – ассоциированная (по Риссу) мера функции $\varphi(u)$; $\mu_\varphi(r) = \mu(r) = \mu\{u \in \mathbb{R}^2 : |u| \leqslant r\}$, $n(r) = [\mu(r)]$, где $[a]$ – целая часть a. Если для $r = r_0 > 0$ $n(r_0) - n(r_0 - 0) = k$, $k \in \mathrm{N}$, то $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_{n-k+1} = r_0$, где $n = n(r_0)$. Далее будем считать, что $\varphi(0) \neq -\infty$. $N_\varphi(r) = N(r) = \int_0^r \frac{\mu(t)}{t}\,dt$. Заметим, что ввиду конечности значения $\varphi(0)$ из формулы Пуассона–Иенсена (см. [6; с. 139]) следует конечность интеграла $N(r)$.

Обозначим через SH_0 класс субгармонических в $\mathbb{R}^2$ функций нулевого порядка, не являющихся константами, т.е. множество всех субгармонических в $\mathbb{R}^2$ функций, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M_\varphi(r)}{\ln r}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{r\to\infty}M_\varphi(r)=\infty$$

(см. [6; с. 161, 84]).

Через P_0 обозначим класс целых в $\mathbb{C}$ функций нулевого порядка: множество всех целых в $\mathbb{C}$ функций $f(z)$, для которых выполняется

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(f,r)}{\ln r}=0,$$

где $M(f,r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$.

Через H_0 обозначим класс всех вещественно-значных функций $h(r)=r^{\rho(r)}$, заданных на луче $[0;+\infty)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\rho(r)$ – непрерывно-дифференцируема на $[0;+\infty)$, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=0$, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho'(r)r\ln r=0$;
2) $h'(r)>0$ на $[0;+\infty)$, $\lim\limits_{r\to\infty}h(r)=+\infty$, $h(0)=1$.

Отметим два свойства функций $h(r)\in H_0$, которые следуют из их определения:

1) $h(r)$ – медленно меняющаяся функция, т.е. $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{h(kr)}{h(r)}=1$ равномерно на каждом интервале $0<a\leqslant k\leqslant b<\infty$ [7; с. 32]; (1)
2) $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{rh'(r)}{h(r)}=0$ [8; с. 60]. (2)

Через $h^{-1}(r)$ обозначим функцию обратную к $h(r)$. *Типом* и *нижним типом* при $h(r)$ назовем соответственно величины

$$\sigma_{\varphi,h}=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{M_\varphi(r)}{h(r)} \quad \text{и} \quad \underline{\sigma}_{\varphi,h}=\varliminf_{r\to\infty}\frac{M_\varphi(r)}{h(r)}.$$

§1. Субгармонические функции нулевого порядка

Теорема 1. *Для любых функций $h(r)\in H_0$ и $\varphi(u)\in SH_0$, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mu(r)}{h(r)}=0, \tag{3}$$

выполняются следующие соотношения:

$$1)\quad M_\varphi(r)\leqslant N_\varphi(r)+o\big(h(r)\big) \quad \textit{при} \quad r\to\infty, \tag{4}$$

$$2)\quad \lim_{r\to\infty}\frac{M_\varphi(r)-N_\varphi(r)}{h(r)}=0, \tag{5}$$

$$3)\quad \underline{\sigma}_{\varphi,h}=\varliminf_{r\to\infty}\frac{M_\varphi(r)}{h(r)}=\varliminf_{r\to\infty}\frac{N_\varphi(r)}{h(r)}. \tag{6}$$

Доказательство. Используем известное неравенство (см. [8; с. 56–57])

$$M_{\varphi}(r) \leqslant \int_1^r \frac{\mu(t)}{t}\,dt + r\int_r^{\infty} \frac{\mu(t)}{t^2}\,dt + O(1). \tag{7}$$

Оценим второе слагаемое в правой части последнего неравенства:

$$\begin{aligned} r\int_r^{\infty} \frac{\mu(t)}{t^2}\,dt &\leqslant \sup_{t\geqslant r} \frac{\mu(t)}{h(t)}\, r\int_r^{\infty} \frac{h(t)}{t^2}\,dt \\ &= \sup_{t\geqslant r} \frac{\mu(t)}{h(t)}\, h(r)\bigl(1+o(1)\bigr) = o\bigl(h(r)\bigr), \qquad r\to\infty. \end{aligned} \tag{8}$$

Из конечности интеграла $N(r)$ (см. введение), а также из (7) и (8) следует утверждение 1) теоремы.

Утверждения 2) и 3) получаем из (1) и неравенства (см. [6; с. 177])

$$N_{\varphi}(r) \leqslant M_{\varphi}(r) + O(1). \tag{9}$$

Следствие. *Пусть субгармонические функции нулевого порядка $\alpha(u)$ и $\beta(u)$ и функция $h(r) \in H_0$ удовлетворяют условию теоремы. Тогда из равенства $\mu_{\alpha}(t) = \mu_{\beta}(t)$ следует равенство $\underline{\sigma}_{\alpha,h} = \underline{\sigma}_{\beta,h}$.*

Замечание. Если

$$0 < \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{M_{\varphi}(r)}{h(r)} < \infty, \tag{10}$$

то [9; с. 231]

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mu(r)}{h(r)} = 0. \tag{11}$$

Аналогично доказательству в [9] можно показать, что из

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{M_{\varphi}(r)}{h(r)} < \infty \tag{12}$$

следует (11), и поэтому в теореме 1 можно заменить условие (3) на условие (12).

Теорема 2. *Для любых функций $h(r) \in H_0$ и $\varphi(u) \in SH_0$ справедливо равенство*

$$\sigma_{\varphi,h} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{M_{\varphi}(r)}{h(r)} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N_{\varphi}(r)}{h(r)}\,.$$

Доказательство. Если $\sigma_{\varphi,h} < \infty$, то утверждение теоремы следует из замечания к теореме 1 и неравенств (4) и (9).

Предположим, что $\sigma_{\varphi,h} = \infty$ и $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{N_\varphi(r)}{h(r)} \leqslant C < \infty$. Тогда, учитывая доказательство теоремы 1, имеем

$$\begin{aligned} M_\varphi(r) &\leqslant N_\varphi(r) + r\int_r^\infty \frac{\mu(t)}{t^2}\,dt + O(1) \\ &= N_\varphi(r) + r\frac{N_\varphi(t)}{t}\bigg|_r^\infty + r\int_r^\infty \frac{N_\varphi(t)}{t^2}\,dt + O(1) \\ &= r\int_r^\infty \frac{N_\varphi(t)}{t^2}\,dt + O(1) < 2Ch(r) \quad \text{при} \quad r > r_0(C) > 0. \end{aligned}$$

Отсюда $\sigma_{\varphi,h} < \infty$, что противоречит предположению.

Следствие 1. *Пусть $\alpha(u)$, $\beta(u) \in SH_0$, $h(r) \in H_0$. Тогда из равенства $\mu_\alpha(t) = \mu_\beta(t)$ следует равенство $\sigma_{\alpha,h} = \sigma_{\beta,h}$.*

Следствие 2. *Для любой функции $\varphi(u) \in SH_0$ выполняется равенство*

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\mu(r)}{M_\varphi(r)} = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\mu(r)}{N_\varphi(r)} = 0.$$

Доказательство. Так как для любой $\varphi(u) \in SH_0$ $M_\varphi(r)$ – непрерывная функция (см. [6; с. 84]) и $\exists\, r_0(\varphi) > 0$ такое, что $M_\varphi(r) > 0$ для любого $r > r_0(\varphi)$, то для любой $\varphi(u) \in SH_0$ найдется (см. [7; с. 35]) ее уточненный порядок, т.е. такая функция $\rho(r)$, что функция $r^{\rho(r)}$ удовлетворяет условию 1) для функций из H_0 и условию

$$0 < \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{M_\varphi(r)}{r^{\rho(r)}} < \infty.$$

Отсюда, а также из (10), (11) и самой теоремы 2, получаем утверждение следствия.

Следствие 3. *Для любых функций $h(r) \in H_0$ и $\varphi(u) \in SH_0$ выполняется неравенство*

$$\sigma_{\varphi,h} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\mu(r)}{rh'(r)}. \tag{13}$$

Доказательство. Утверждение следствия вытекает из теоремы 2, конечности величины $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mu(t)}{t}\,dt$ (см. введение) и неравенства

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{h(r)}\int_1^r \frac{\mu(t)}{t}\,dt \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\mu(r)}{rh'(r)}$$

(см. [8; с. 46]).

Замечание. В [8] для более широкого класса функций $h(r)$ теорема 1 доказана при условии $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\mu(r)}{rh'(r)}<\infty$, которое сильнее условия (12) ввиду неравенства (13), теорема 2 доказана при дополнительном условии невозрастания функции $\dfrac{rh'(r)}{h(r)}$, а следствие 3 из теоремы 2 при дополнительном условии $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\ln r}{h(r)}=0$.

Ввиду того, что для субгармонической функции нулевого порядка из (10) следует (11), требуется подбирать отличную от $h(r)$ функцию $d(r)$ или функцию $g(r)>1$ такие, что $0<\varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\mu(r)}{d(r)}<\infty$, $0<\varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\mu(r)\ln g(r)}{h(r)}<\infty$ при выполнении (10). В [8] в качестве $d(r)$ использовалась функция $rh'(r)$. Могут быть полезны также теоремы 3–5.

Теорема 3. *Пусть функция $g(r)>1$ и непрерывно-дифференцируема на $[r_0,\infty)$, $r_0\geqslant 0$, $\Delta_{\varphi,h,g}=\varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\mu(r)\ln g(r)}{h(r)}$, $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{h(rg(r))}{h(r)}=C_1<\infty$, $\exists m>0$ такое, что $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{h(r/(g(r))^m)}{h(r)}=C_2<1$, тогда для любой $\varphi(u)\in SH_0$*

1) $\sigma_{\varphi,h}=0 \iff \Delta_{\varphi,h,g}=0$,
2) $0<\sigma_{\varphi,h}<\infty \iff 0<\Delta_{\varphi,h,g}<\infty$,
3) $\sigma_{\varphi,h}=\infty \iff \Delta_{\varphi,h,g}=\infty$.

Доказательство. Используя определение $N(r)$, имеем

$$\frac{h(rg(r))}{h(r)}\frac{N(r(g(r)))}{h(rg(r))}=\frac{N(r)}{h(r)}+\int_r^{rg(r)}\frac{\mu(t)}{t}\,dt\Big/h(r)\geqslant\frac{N(r)}{h(r)}+\frac{\mu(r)\ln g(r)}{h(r)}.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, по теоремам 1 и 2 получаем

$$\Delta_{\varphi,h,g}\leqslant\underline{\sigma}_{\varphi,h}+\Delta_{\varphi,h,g}\leqslant C_1\sigma_{\varphi,h},\quad\text{если}\ \underline{\sigma}_{\varphi,h}<\infty;\tag{14}$$
$$\Delta_{\varphi,h,g}\leqslant C_1\sigma_{\varphi,h},\quad\text{если}\ \underline{\sigma}_{\varphi,h}=\infty.\tag{15}$$

С другой стороны,

$$\frac{N(r)}{h(r)}=\frac{h(r/(g(r))^m)}{h(r)}\frac{N(r/(g(r))^m)}{h(r/(g(r))^m)}+\int_{r/(g(r))^m}^{r}\frac{\mu(t)}{t}\,dt\Big/h(r)$$
$$\leqslant\frac{h(r/(g(r))^m)}{h(r)}\frac{N(r/(g(r))^m)}{h(r/(g(r))^m)}+\frac{m\mu(r)\ln g(r)}{h(r)}\tag{16}$$

и, значит,

$$\sigma_{\varphi,h}\leqslant C_2\sigma_{\varphi,h}+m\Delta_{\varphi,h,g}.\tag{17}$$

Из (14) и (17) вытекает, что если $\sigma_{\varphi,h}=0$, то $\Delta_{\varphi,h,g}=0$; если $0<\sigma_{\varphi,h}<\infty$, то $0<\Delta_{\varphi,h,g}<\infty$.

Пусть $\sigma_{\varphi,h} = \infty$. Тогда найдется возрастающая последовательность положительных чисел $\{r_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N(r_k)}{h(r_k)} = \infty, \qquad \sup_{0\leqslant t\leqslant r_k} \frac{N(t)}{h(t)} = \frac{N(r_k)}{h(r_k)}. \tag{18}$$

Из последнего равенства получаем

$$\frac{N(r_k)}{h(r_k)} \geqslant \frac{N(r_k/(g(r_k))^m)}{h(r_k/(g(r_k))^m)} \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Из (16), (18) и (19) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\mu(r_k)\ln g(r_k)}{h(r_k)} = \infty$. Значит, если $\sigma_{\varphi,h} = \infty$, то $\Delta_{\varphi,h,g} = \infty$.

Теорема 4. *Если* $\ln h(e^r)$ *вогнута на* $[r_0; +\infty)$, $r_0 \geqslant 0$, *то для любых функций* $\varphi(u) \in SH_0$, $h(r) \in H_0$

$$\sigma_{\varphi,h} = \infty \iff \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\mu(r)(\ln h^{-1}(kh(r)) - \ln r)}{h(r)\ln k} = \infty; \tag{20}$$

$$\sigma_{\varphi,h} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\mu(r)(\ln h^{-1}(kh(r)) - \ln r)}{h(r)\ln k} \leqslant \frac{k\sigma_{\varphi,h} - \underline{\sigma}_{\varphi,h}}{\ln k} \tag{21}$$
$$\forall k, \quad 1 < k < \infty, \quad \text{если} \quad \sigma_{\varphi,h} \neq \infty;$$

В частности, при $k = e = \min\limits_{1<k<\infty} \dfrac{k}{\ln k}$ *и* $\underline{\sigma}_{\varphi,h} = 0$

$$\sigma_{\varphi,h} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\mu(r)(\ln h^{-1}(eh(r)) - \ln r)}{h(r)} \leqslant e\sigma_{\varphi,h}; \tag{22}$$

при $k = k_0$ *и* $0 < \underline{\sigma}_{\varphi,h} < \sigma_{\varphi,h}$, $\sigma_{\varphi,h} \neq \infty$,

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi,h} &\leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\mu(r)(\ln h^{-1}(k_0h(r)) - \ln r)}{h(r)\ln k_0}\\ &\leqslant \frac{k_0\sigma_{\varphi,h} - \underline{\sigma}_{\varphi,h}}{\ln k_0}\\ &= \min_{1<k<\infty} \frac{k\sigma_{\varphi,h} - \underline{\sigma}_{\varphi,h}}{\ln k} < e\sigma_{\varphi,h} - \underline{\sigma}_{\varphi,h},\end{aligned} \tag{23}$$

где k_0 *– единственный корень уравнения* $k(\ln k - 1) = \dfrac{\underline{\sigma}_{\varphi,h}}{\sigma_{\varphi,h}}$, $k_0 \in (e; \infty)$.

Доказательство. Положим $g(r) = \dfrac{h^{-1}(kh(r))}{r} = \dfrac{h^{-1}(kh(r))}{h^{-1}(h(r))}$. Тогда

$$\frac{h(rg(r))}{h(r)} = k. \tag{24}$$

Так как по условию функция $\ln h(e^r)$ вогнута, то функция $\ln h^{-1}(e^r)$ выпукла. Поэтому

$$\frac{\ln h^{-1}(kh(r)) - \ln r}{\ln k} \geqslant \left(\ln h^{-1}(e^x)\right)'\big|_{x=\ln h(r)} = \frac{h(r)}{rh'(r)}. \tag{25}$$

Отметим, что из (25) и свойства (2) функции $h(r)$ вытекает равенство

$$\lim_{r\to\infty} g(r) = \infty.$$

Из (24), (14), (15), (25) и (13) следует утверждение (20) и неравенство (21) теоремы.

Неравенства (22) и (23) теоремы легко получаются при исследовании на экстремум на интервале $(1;\infty)$ функции $\dfrac{k\sigma_{\varphi,h} - \underline{\sigma}_{\varphi,h}}{\ln k}$.

Теорема 5. *Если* $\ln h(e^r)$ *выпукла, а* $\ln h(e^r)$ *вогнута, то для любых функций* $\varphi(u) \in SH_0$, $h(r) \in H_0$

$$\sigma_{\varphi,h} = \infty \iff \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\mu(r)\ln k}{h(kr) - h(r)} = \infty \qquad \forall k, 1 < k < \infty; \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{\varphi,h} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\mu(r)\ln k}{h(kr) - h(r)} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\mu(r)}{rh'(r)} \leqslant e\sigma_{\varphi,h} - \underline{\sigma}_{\varphi,h} \\ \forall k,\quad 1 < k < \infty, \quad \textit{если} \quad \sigma_{\varphi,h} \neq \infty;\end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi,h} &\leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\mu(r)}{rh'(r)} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\mu(r)\ln k_0}{h(k_0 r) - h(r)} \leqslant \ln k_0(e^{1/\ln k_0}\sigma_{\varphi,h} - \underline{\sigma}_{\varphi,h}) \\ &= \min_{1<k<\infty} \ln k(e^{1/\ln k}\sigma_{\varphi,h} - \underline{\sigma}_{\varphi,h}) < e\sigma_{\varphi,h} - \underline{\sigma}_{\varphi,h} \\ &\qquad \textit{при} \quad 0 < \underline{\sigma}_{\varphi,h} < \sigma_{\varphi,h}, \quad \sigma_{\varphi,h} \neq \infty,\end{aligned} \tag{28}$$

где k_0 *– единственный корень уравнения* $(\ln k - 1)e^{1/\ln k} = \ln k \dfrac{\underline{\sigma}_{\varphi,h}}{\sigma_{\varphi,h}}$, $k_0 \in (e;\infty)$.

Доказательство. Из выпуклости функции $h(e^r)$ и вогнутости функции $\ln h(e^r)$ для любого $k > 1$ вытекает неравенство

$$\frac{\ln k}{h(kr) - h(r)} \leqslant \frac{1}{rh'(r)} \leqslant \frac{\ln k}{h(r)(\ln h(kr) - \ln h(r))}. \tag{29}$$

Заметим, что из свойства (1) функции $h(r)$ следует равенство $\lim_{r\to\infty} \ln g(r) = \infty$, где $\ln g(r) = \dfrac{h(r)\ln k}{h(kr) - h(r)}$.

Ввиду свойства (1) функции $h(r)$ имеем

$$\ln h(kr) - \ln h(r) = \ln\left(1 + \frac{h(kr) - h(r)}{h(r)}\right) \sim \frac{h(kr) - h(r)}{h(r)} \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{30}$$

Из (29) и (30) получаем

$$\frac{\ln k}{h(kr) - h(r)} \sim \frac{1}{rh'(r)} \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{31}$$

Так как $\ln h(e^r)$ вогнута, то функция $\dfrac{rh'(r)}{h(r)}$ невозрастающая. Учитывая это и соотношение (31), находим

$$\begin{aligned} \ln \frac{h(rg(r))}{h(r)} &= \int_r^{rg(r)} \frac{th'(t)}{h(t)} \frac{1}{t}\, dt \\ &\leqslant \frac{rh'(r)}{h(r)} \frac{h(r)\ln k}{h(kr) - h(r)} = 1 + o(1) \quad \text{при} \quad r \to \infty. \end{aligned} \tag{32}$$

Из (32), (13), (14), (15) следует утверждение (26) и неравенство (27) теоремы.

Пусть $0 < \underline{\sigma}_{\varphi,h} < \sigma_{\varphi,h}$, $\sigma_{\varphi,h} \neq \infty$. Положим $\ln g(r) = \dfrac{h(r)}{h(kr) - h(r)}$. В этом случае получаем оценку

$$\sigma_{\varphi,h} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\mu(r)\ln k}{h(kr) - h(r)} \leqslant \ln k(e^{1/\ln k}\sigma_{\varphi,h} - \underline{\sigma}_{\varphi,h}).$$

Исследование на экстремум функции $\psi(k) = \ln k(e^{1/\ln k}\sigma_{\varphi,h} - \underline{\sigma}_{\varphi,h})$ приводит к уравнению

$$\sigma_{\varphi,h} e^{1/x}(x - 1) = x\underline{\sigma}_{\varphi,h}, \quad \text{где} \quad x = \ln k. \tag{33}$$

Так как

$$\begin{aligned} (\sigma_{\varphi,h} e^{1/x}(x-1))' &= \sigma_{\varphi,h} e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) > \sigma_{\varphi,h}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \sigma_{\varphi,h}\left(1 + \frac{1}{x^3}\right) > (x\underline{\sigma}_{\varphi,h})' = \underline{\sigma}_{\varphi,h} \qquad \forall x > 0, \end{aligned}$$

при $0 < x \leqslant 1$ $\sigma_{\varphi,h} e^{1/x}(x - 1) < x\underline{\sigma}_{\varphi,h}$, $\lim_{x\to\infty} \sigma_{\varphi,h} e^{1/x}(x - 1) - x\underline{\sigma}_{\varphi,h} = \infty$, то уравнение (33) имеет единственный положительный корень $x_0 = \ln k_0$, причем $k_0 > e$.

Замечание. Использование в качестве функции $\ln g(r)$ функций вида $\ln h^{-1}(kh(r)) - \ln r$, $\dfrac{h(r)}{h(kr)-h(r)}$ и других функций, которые выражаются формулами, не содержащими $h'(r)$, позволяет для ряда конкретных классов $h(r)$ упростить нахождение оценок сверху для величины $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\mu(r)}{rh'(r)}$, не прибегая к решению, в частности приближенному (см. [8]), дифференциальных уравнений.

Теорема 6. *Если* $\ln h^{-1}(r)$ *правильно меняющаяся функция порядка* ρ, $1<\rho<\infty$, *т.е. для любого* $k>0$ $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\ln h^{-1}(kr)}{\ln h^{-1}(r)} = k^{1/\rho}$, *то для любых функций* $\varphi(u)\in SH_0$, $h(r)\in H_0$

$$\sigma_{\varphi,h}=\infty \iff \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\mu(r)\ln r}{h(r)}=\infty; \tag{34}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{\varphi,h}\rho\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\mu(r)\ln r}{h(r)}\leqslant\sigma_{\varphi,h}\rho\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)^{\rho-1},\\ \textit{если}\quad \sigma_{\varphi,h}\neq\infty\quad \textit{и}\quad \underline{\sigma}_{\varphi,h}=0;\end{gathered} \tag{35}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{\varphi,h}\rho\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\mu(r)\ln r}{h(r)}\leqslant\frac{k_0\sigma_{\varphi,h}-\underline{\sigma}_{\varphi,h}}{k_0^{1/\rho}-1}=\inf_{1<k<\infty}\frac{k\sigma_{\varphi,h}-\underline{\sigma}_{\varphi,h}}{k^{1/\rho}-1}\\ <\sigma_{\varphi,h}\rho\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)^{\rho-1}-(\rho-1)\underline{\sigma}_{\varphi,h},\\ \textit{если}\quad 0<\underline{\sigma}_{\varphi,h}<\sigma_{\varphi,h}<\infty,\end{gathered} \tag{36}$$

где k_0 *- единственный корень уравнения* $(\rho-1)k-\rho k^{(\rho-1)/\rho}+\dfrac{\underline{\sigma}_{\varphi,h}}{\sigma_{\varphi,h}}=0$ *на интервале* $(1;\infty)$, *причем* $1<k_0<\left(\dfrac{\rho}{\rho-1}\right)^{\rho}$.

Доказательство. Рассмотрим случаи (35) и (36). Случай (34) доказывается аналогично.

Ввиду (24), (14) и определения правильно меняющейся функции для любого $k>1$ верно неравенство

$$\begin{aligned}k\sigma_{\varphi,h}-\underline{\sigma}_{\varphi,h}&\geqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\mu(r)(\ln h^{-1}(kh(r))-\ln r)}{h(r)}\\ &=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\mu(r)\ln r(k^{1/\rho}-1)}{h(r)}.\end{aligned} \tag{37}$$

Исследовав на экстремум на интервале $(1;\infty)$ функцию $\psi(k)=\dfrac{k\sigma_{\varphi,h}-\underline{\sigma}_{\varphi,h}}{k^{1/\rho}-1}$, получим искомые оценки сверху.

С другой стороны, для любого $k > 1$ имеем

$$\frac{N(r)}{h(r)} \leqslant \frac{N(h^{-1}(h(r)/k))}{h(h^{-1}(h(r)/k))}\,\frac{h(h^{-1}(h(r)/k))}{h(r)} + \frac{\mu(r)(\ln r - \ln h^{-1}(h(r)/k))}{h(r)}\,. \tag{38}$$

Переходя к пределу в (38), находим неравенство

$$\big(1 - (1/k)\big)\sigma_{\varphi,h} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\mu(r)\ln r(1-(1/k)^{1/\rho})}{h(r)}\,. \tag{39}$$

Так как $\lim\limits_{k\to 1} \dfrac{1-(1/k)}{1-(1/k)^{1/\rho}} = \rho$, то из (39) получаем искомую оценку снизу.

Замечание. Для частного случая $h(r) = (\ln r)^\rho$, $1 < \rho < \infty$, утверждение (34) и неравенство (35) при $\forall\, \underline{\sigma}_{\varphi,h}$ доказаны в [8].

Теорема 7. *Пусть $h(r)$ дважды дифференцируема, $h(e^r)$ строго выпукла на $[0,+\infty)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\ln r}{h(r)} = 0$. Тогда для любых функций $\varphi(u) \in SH_0$, $h(r) \in H_0$ $\exists n_0(\varphi,h) \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n \geqslant n_0(\varphi,h)$ $\exists r_n$ – единственный корень уравнения*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \ln\lambda_k}{n} = \ln r - \frac{h(r)}{rh'(r)}\,,$$

при этом

1) $\sigma_{\varphi,h} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\ln r_n - \sum_{k=1}^{n}\ln\lambda_k}{h(r_n)}$;

если, кроме того, $\sigma_{\varphi,h} < \infty$, то

2) $\underline{\sigma}_{\varphi,h} = \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\ln\lambda_n - \sum_{k=1}^{n}\ln\lambda_k}{h(\lambda_n)}$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\ln r}{h(r)} = 0$, то по теореме 2

$$\sigma_{\varphi,h} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N_\varphi(r)}{h(r)} = \varlimsup_{r\to\infty} \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt \Big/ h(r)$$
$$= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r)\ln r - \sum_{k=1}^{n(r)}\ln\lambda_k}{h(r)}\,. \tag{40}$$

Ввиду равенства $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\ln r}{h(r)} = 0$ и теоремы 2 будем далее, не теряя в общности, считать, что $\mu(1) = 0$, и, следовательно, $\lambda_1 > 1$.

Рассмотрим функцию

$$\psi(r) = \frac{n(r)\ln r - \sum_{k=1}^{n(r)}\ln\lambda_k}{h(r)}$$

и функции

$$\psi_n(r) = \frac{n\ln r - \sum_{k=1}^{n}\ln\lambda_k}{h(r)}, \qquad n \in \mathbf{N},$$

на промежутке $[1;\infty)$. Отметим, что функция $\psi(r)$ непрерывна, а функции $\psi_n(r)$ дважды дифференцируемы на $[1;\infty)$.

Так как $\psi_n(1) < 0$, $\psi_n(r) > 0$ при $r > \lambda_n$, $\lim\limits_{r\to\infty}\psi_n(r) = 0$, то $\exists\, r_n$, $1 < r_n < \infty$, такое, что $\max\limits_{1\leqslant r<\infty}\psi_n(r) = \psi_n(r_n)$. Число r_n является корнем уравнения $\psi_n'(r) = 0$, т.е. уравнения

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln\lambda_k}{n} = \ln r - \frac{h(r)}{rh'(r)}\,. \tag{41}$$

Так как $h(e^r)$ строго выпукла, а $h(r)$ дважды дифференцируема, то $(r(h'(r))' > 0$. Следовательно,

$$\left(\ln r - \frac{h(r)}{rh'(r)}\right)' = \frac{h(r)(rh'(r))'}{(rh'(r))^2} > 0.$$

Функция $\ln r - \dfrac{h(r)}{rh'(r)}$ возрастающая. Поэтому корень уравнения (41) единственный, т.е. равен r_n.

Отметим, что $\psi_n(r) = \psi(r)$ на отрезке $[\lambda_n;\lambda_{n+1}]$. Таким образом,

$$\max_{\lambda_n\leqslant r\leqslant\lambda_{n+1}}\psi(r) \leqslant \max_{1\leqslant r\leqslant\infty}\psi_n(r) = \psi(r_n).$$

Отсюда получаем оценку

$$\sigma_{\varphi,h} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln r_n - \sum_{k=1}^{n}\ln\lambda_k}{h(r_n)}\,. \tag{42}$$

Так как $\psi_n(r)$ имеет только одну точку максимума, то на промежутках $[1;r_n]$ и $[r_n;\infty)$ функция $\psi(r)$ монотонна. Поэтому $\min\limits_{\lambda_n\leqslant r\leqslant\lambda_{n+1}}\psi(r) = \min\{\psi(\lambda_n);\psi(\lambda_{n+1})\}$. Отсюда при условии $\sigma_{\varphi,h} < \infty$ по теореме 1 и равенству для $\underline{\sigma}_{\varphi,h}$, аналогичному равенству (40), получаем утверждение 2) теоремы.

Рассмотрим целую функцию $f(r) = \prod\limits_{n=1}^{n=\infty}\left(1 - \dfrac{z}{\lambda_n}\right)$. По теореме 2 и равенству (40) из равенства $n_{\varphi,h} = n_{f,h}$ следует равенство $\sigma_{\varphi,h} = \sigma_{f,h}$. Оценим $M(f,r)$ снизу. Имеем

$$M(f,r) = \prod_{k=1}^{k=\infty}\left(1 + \frac{r}{\lambda_k}\right) \geqslant \prod_{k=1}^{k=n}\left(1 + \frac{r}{\lambda_k}\right) \geqslant \frac{r^n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\lambda_k}\,,$$

т.е.

$$\ln M(f,r) \geqslant n\ln r - \sum_{k=1}^{n} \ln\lambda_k \qquad \forall r>0, \quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{43}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n}\ln\lambda_k}{n} = \infty$. Отсюда, из свойства (2) функции $h(r)$ и из (41) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$.

Из последнего равенства и из (43) получаем

$$\sigma_{\varphi,h} = \sigma_{f,h} \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{M(f,r_n)}{h(r_n)} \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\ln r_n - \sum_{k=1}^{n}\ln\lambda_k}{h(r_n)}. \tag{44}$$

Из (42) и (44) следует утверждение 1) теоремы.

Пример. Если $h(r) = (\ln r)^{\rho}$, $1<\rho<\infty$, то

$$(\sigma_{\varphi,h}\rho)^{\frac{1}{\rho-1}} = \frac{\rho-1}{\rho} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\sum_{k=1}^{n}\ln\lambda_k}. \tag{45}$$

Так как в формуле (45) показатель степени, в которую возводится n, равный $\dfrac{\rho}{\rho-1}$, стремится к 1 при $\rho\to\infty$, представляет интерес приводимая ниже теорема.

Теорема 8. *Для любой функции* $\varphi(u)\in SH_0$ *такой, что* $\lim\limits_{r\to\infty}\mu(r)=\infty$, *верно равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\sum_{k=1}^{n}\ln\lambda_k} = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим $f(z)\in P_0$ такую, что $n_f(r) = n_{\varphi}(r)$, с множеством нулей $\{\lambda_n\}$, $0<\lambda_n\leqslant\lambda_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. Так как порядок $f(z)$ равен нулю, то для любого $\beta>0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_n^{\beta}}$ сходится [10; с. 280]. По неравенству Карлемана [11; с. 300] сходится также ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\lambda_k^{\beta}}\Big)^{1/n}$ для любого $\beta>0$. Покажем, что последовательность членов последнего ряда невозрастающая.

$$\begin{aligned}\left(\prod_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\lambda_k^{\beta}}\right)^{1/n}\Bigg/\left(\prod_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{\lambda_k^{\beta}}\right)^{1/(n+1)} &= \left(\lambda_{n+1}\Bigg/\left(\prod_{k=1}^{k=n}\lambda_k\right)^{1/n}\right)^{\beta/(n+1)}\\ &\geqslant \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right)^{\beta/(n+1)} \geqslant 1 \qquad \forall\beta>0. \end{aligned}\tag{46}$$

Из (46) и сходимости ряда следует [10; с. 279], что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\left(\prod_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^{\beta/n}} = 0$. Отсюда ввиду того, что β можно взять сколь угодно малым, получаем утверждение теоремы.

Следствие. *Если $f(z) \in P_0$, $\Lambda_f = \{\zeta_n\}$ – нулевое множество $f(z)$, $|\zeta_1| > 0$, $|\zeta_n| \leqslant |\zeta_{n+1}|$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то функция $g(z)$ с $\Lambda_g = \{\xi_n\}$, $\xi_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} \zeta_k\right)^{1/n}$, где в качестве ξ_n выбирается один из возможных корней, также является целой функцией нулевого порядка.*

Замечание. Пусть $f(z)$ – целая функция нулевого порядка. $z \in \mathbb{C}$, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ – нули $f(z)$, каждый нуль выписывается столько раз в последовательности ζ_n, какова его кратность, $|\zeta_1| > 0, |\zeta_n| = \lambda_n$, $\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $n(r)$ – число нулей в кольце $\{z : \ 0 < |z| \leqslant r\}$, $u = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$, $\varphi(u) = \ln|f(z)|$. Тогда в указанных обозначениях теоремы 1–8 верны для любой целой функции нулевого порядка.

Подчеркнем, что теорема 7 позволяет вычислять $\sigma_{f,h}$, а при $\sigma_{f,h} < \infty$ и $\underline{\sigma}_{f,h}$, через нули $f(z) \in P_0$, а не только через коэффициенты разложения в ряд Тейлора, как это делается в случае целых функций конечного положительного порядка.

§ 2. "Расщепление" целых функций нулевого порядка

Приведем две теоремы о "расщеплении" целых функций нулевого порядка.

Теорема 9. *Пусть $f(z)$ – целая трансцендентная функция нулевого порядка, $f(0) = 1$, $n_f(r)$ – число нулей $f(z)$ в круге $\{z : |z| \leqslant r\}$, $0 < \sigma_{f,h} < \infty$, $\sigma_{f,h} = a + b$, $0 \leqslant a < \sigma_{f,h}$. Тогда найдутся трансцендентные целые функции нулевого порядка $d(z)$ и $g(z)$ такие, что $f(z) = d(z)g(z)$, $\sigma_{d,h} = a$, $\sigma_{g,h} = b$; $n_d(r) = \left[\dfrac{a}{\sigma_{f,h}} n_f(r)\right]$ при $a > 0$, $n_d(r) = \min\left\{n_f(r), \left[\min\limits_{t \geqslant r} \dfrac{h(t)}{\ln t}\right]^{1/2}\right\}$ при $a = 0$, $n_g(r) = n_f(r) - n_d(r)$.*

Доказательство. Целая трансцендентная функция $f(z)$ рода нуль при условии $f(0) = 1$ полностью определяется своими нулями ввиду представления $f(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z}{\zeta_n}\right)$, $|\zeta_{n+1}| \geqslant |\zeta_n|$ для любого $n \in \mathbb{N}$, где $\Lambda = \{\zeta_n\}$ – множество нулей функции.

Разобьем Λ на два подмножества и тем самым определим целые функции $d(z)$ и $g(z)$, $d(0) = g(0) = 1$. Разбиение проведем так, чтобы $n_d(r)$ и $n_g(r)$ удовлетворяли условию теоремы.

Очевидно, что $f(z) = d(z)g(z)$. Для любой целой трансцендентной функции $f(z)$ (см. [7; с. 2]) имеет место равенство

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln M(f,r)}{\ln r} = \infty. \tag{47}$$

Из (47), неравенства $0 < \sigma_{f,h} < \infty$ и представления

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{M(f,r)}{h(r)} = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{M(f,r)}{\ln r} \frac{\ln r}{h(r)}$$

следует, что
$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln r}{h(r)}=0. \tag{48}$$

Рассмотрим случай $a>0$. Имеем
$$\frac{a}{\sigma_{f,h}}N_f(r)\geqslant N_d(r)\geqslant\int_{|\zeta_1|}^{r}\frac{(a/\sigma_{f,h})n_f(t)-1}{t}\,dt\geqslant\frac{a}{\sigma_{f,h}}N_f(r)-\ln\frac{r}{|\zeta_1|}. \tag{49}$$

Из (48), (49) и теоремы 2 следует, что $\sigma_{d,h}=a$. Аналогично показывается, что и $\sigma_{g,h}=b$.

Рассмотрим случай $a=0$. Из формулы для $n_d(r)$ получаем $n_d(r)\leqslant\left(\dfrac{h(r)}{\ln r}\right)^{1/2}$. Отсюда и из (48) находим оценку
$$\frac{N_d(r)}{h(r)}\leqslant\frac{n_d(r)\ln r}{h(r)}\leqslant\left(\frac{\ln r}{h(r)}\right)^{1/2}=o(1)\quad\text{при}\quad r\to\infty,$$
из которой (с учетом теоремы 2) следует, что $\sigma_{d,h}=0$.

Используя неравенство
$$N_f(r)\geqslant N_g(r)=N_f(r)-N_d(r)\geqslant N_f(r)-o\big(h(r)\big)\quad\text{при}\quad r\to\infty$$
и теорему 2, находим, что $\sigma_{g,h}=\sigma_{f,h}$.

Следующая теорема показывает, что “расщепление” $\sigma_{f,h}=\sigma_{d,h}+\sigma_{g,h}$ можно провести, указав номера нулей $f(z)$, которые являются нулями соответственно функций $d(z)$ и $g(z)$, и тем самым, полностью определить эти функции.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Через $0,a_1a_2\dots a_m\dots$ обозначим запись числа $\dfrac{a}{\sigma_{f,h}}$ в двоичной системе счисления. Разобьем Λ на непересекающиеся подмножества: $\Lambda=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\Lambda_m$, где $\Lambda_m=\{\zeta_n\in\Lambda: n=2^mk-2^{m-1},\ k\in\mathbb{N}\}$. Для каждого $m\in\mathbb{N}$ построим функцию $f_m(z)$ такую, что Λ_m является ее нулевым множеством и $f_m(0)=1$. Определим функции: $\widehat{f}_m(z)=f_m(z)$, если $a_m=1$; $\widehat{f}_m(z)=1$, если $a_m=0$. Положим $d(z)=\prod\limits_{m=1}^{\infty}\widehat{f}_m(z)$, если $a>0$; $d(z)=\prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{\xi_m}\right)$, где $\xi_m=\zeta_n$, $n=2^m-2^{m-1}$, если $a=0$; $g(z)=\dfrac{f(z)}{d(z)}$. Тогда $\sigma_{d,h}=a$, $\sigma_{g,h}=b$.*

Доказательство теоремы сходно с доказательством предыдущей теоремы.

§ 3. Замкнутые подмодули в модулях целых функции нулевого порядка

Пусть $f(z) \in P_0$ и является трансцендентной. Известно, что ее можно представить в виде

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right),$$

$C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $|\zeta_n| \leqslant |\zeta_{n+1}|$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Через $\widetilde{f}(z)$ обозначим функцию

$$\widetilde{f}(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right),$$

где $\lambda_n = |\zeta_n|$.

Рассмотрим произвольную возрастающую бесконечную подпоследовательность натуральных чисел $K = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и введем функцию

$$f_K(z) = Cz^s \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\zeta_{n_k}}\right), \quad 0 \leqslant s \leqslant m.$$

Лемма 1. *Пусть* $\sigma_{f,h} < \infty$. *Тогда выполняются неравенства*

1) $\ln M(f_K, r) \leqslant \ln M(\widetilde{f}_K, r) \leqslant \ln M(\widetilde{f}, r) \quad \forall r \geqslant 1$,
2) $\ln M(\widetilde{f}, r) \leqslant \sigma_{f,h} h(r)(1 + o(1))$ *при* $r \to \infty$.

Рассмотрим алгебру A всех целых функций нулевого порядка типа $\sigma_{f,h}$, $0 \leqslant \sigma_{f,h} < \infty$, т.е.

$$A = \left\{ f(z) : |f(z)| \leqslant e^{(\sigma_{f,h}+\varepsilon)h(|z|)} \ \forall \varepsilon > 0 \text{ при } |z| > r_0(\varepsilon) > 0 \right\}.$$

В этой алгебре введем топологию индуктивного предела нормированных пространств

$$A_n = \left\{ f(z) : \|f\|_n = \sup_{0 \leqslant |z| < \infty} \frac{|f(z)|}{e^{nh(|z|)}} \right\}.$$

Можно показать, что пространство A является пространством типа LN^* (см. [12]), в котором последовательность функций $f_k(z) \in A$ сходится к $f(z)$ тогда и только тогда, когда $\exists n_0$ такое, что $f_k(z) \in A_{n_0}$ для любого $k = 0, 1, \ldots$ и последовательность $\{f_k(z)\}$ сходится к $f(z)$ в A_{n_0}.

Во многих вопросах важно описать (см. [5]) все замкнутые идеалы в алгебре A. В данной работе мы рассмотрим более общую задачу, а именно, рассмотрим множество A_{σ_0}, которое определяется следующим образом:

$$A_{\sigma_0} = \left\{ f(z) \in A : |f(z)| \leqslant C_f e^{\sigma_{f,h} h(r)},\ \sigma_{f,h} < \sigma_0 \right\},$$

где $C_f = C(f) > 0$.

Очевидно, что множество A_{σ_0} с топологией индуцированной из A является замкнутым модулем над кольцом многочленов. В данной статье мы опишем все замкнутые подмодули в рассматриваемом замкнутом модуле A_{σ_0}.

Пусть I – замкнутый подмодуль в A_{σ_0}. Если $f(z) \in I$, то через $\Lambda^f = \{(0, n_0^f), (\zeta_1^f, n_1^f), \dots, (\zeta_j^f, n_j^f), \dots\}$ обозначим последовательность нулей функции $f(z)$ с соответствующей кратностью. Через $\Lambda^I = \bigcap\limits_{f \in I} \Lambda^f = \{(0, n_0), (\zeta_1, n_1), \dots, (\zeta_i, n_i), \dots\}$ – обозначим нулевое множество подмодуля I. Это означает, что если $(\zeta_{i^*}, n_{i^*}) \in \Lambda^I$, то $f^{(p)}(\zeta_{i^*}) = 0$ для любой функции $f(z) \in I, \forall p, 0 \leqslant p \leqslant n_{i^*} - 1$, $i = 1, 2, \dots$, причем $\exists f^*(z) \in I$ такая, что $f^{*(n_{i^*})}(\zeta_{i^*}) \neq 0$. Отметим, что если $\zeta \neq \zeta_i, i = 1, 2, \dots$, то $\exists f_\zeta(z) \in I$ такая, что $f_\zeta(\zeta) \neq 0$.

Теорема 11. *Замкнутый подмодуль I однозначно определяется своим нулевым множеством и, более того, является главным.*

Далее используем следующую лемму, которая доказывается аналогично соответствующим результатам в [13].

Лемма 2. *Пусть $f(z) \in I$, $(\zeta_j^f, n_j^f) \in \Lambda^f$. Если $(\zeta_j^f, n_j^f) \notin \Lambda^I$, то выполняется одно из следующих двух условий:*

1) $\dfrac{f(z)}{(z - \zeta_j^f)^{n_j^f}} \in I$, *если* $\zeta_j^f \neq \zeta_i$, $i = 1, 2, \dots$;

2) $\dfrac{f(z)}{(z - \zeta_j^f)^{(n_j^f - n_{i^*})}} \in I$, *если* $\zeta_j^f = \zeta_{i^*}$ *для некоторого* $\zeta_{i^*} \in \Lambda^I$.

Доказательство теоремы. Пусть $f(z) \in I$. Рассмотрим множество $\Lambda^K = \Lambda^f \setminus \Lambda^I$, которое определяется следующим образом:

если $(\zeta_j^f, n_j^f) \in \Lambda^I$, то $(\zeta_j^f, n_j^f) \notin \Lambda^K$;
если $(\zeta_j^f, n_j^f) \notin \Lambda^I$, но существует пара $(\zeta_i, n_i) \in \Lambda^I$ такая, что $\zeta_i = \zeta_j^f$, $n_i < n_j^f$, то $(\zeta_j^f, n_j^f - n_i) \in \Lambda^K$;
если $(\zeta_j^f, n_j^f) \notin \Lambda^I$ и не существует пары $(\zeta_i, n_i) \in \Lambda^I$ такой, что $\zeta_i = \zeta_j^f$, то $(\zeta_j^f, n_j^f) \in \Lambda^K$.

Обозначим $\Lambda^K = \{(\zeta_{j_k}^f, n_{j_k})\}$, $\zeta_{j_0} = 0$, $|\zeta_{j_k}^f| \leqslant |\zeta_{j_{k+1}}^f|$ $\forall k \in \mathbb{N}$; $R_k(z) = z^{n_{j_0}} \prod\limits_{i=1}^{i=k} \left(1 - \dfrac{z}{\zeta_{j_i}^f}\right)^{n_{j_i}}$. Используя лемму 2, можно построить последовательность функций $g_k(z) = \dfrac{f(z)}{R_k(z)} \in I$. По лемме 1 $\exists \varepsilon > 0, C_{f,\varepsilon} > 0$ такие, что выполняется неравенство $|g_k(z)| \leqslant |\widetilde{g_k}(z)| \leqslant |\widetilde{f}(z)| \leqslant C_{f,\varepsilon} e^{(\sigma_0 - \varepsilon)h(|z|)}$ $\forall k \in \mathbb{N}, \forall z, |z| \geqslant 1$. Следовательно, последовательность функций $g_k(z)$ по теореме Монтеля сходится к некоторой функции $g(z) \in \Lambda_{\sigma_0}$, и в силу того, что I – замкнутый подмодуль, $g(z) \in I$.

Таким образом, найдется функция $g(z) \in I$ такая, что $\Lambda^g = \Lambda^I$. Докажем, что $g(r)$ порождает I. Пусть $f(z) \in I$. Рассмотрим множество пар $\Lambda^L = \Lambda^f \setminus \Lambda^g = \{(\zeta^f_{j_l}, n_{j_l})\}$, $\zeta_{j_0} = 0$, $|\zeta^f_{j_l}| \leqslant |\zeta^f_{j_{l+1}}|$ для любого $l \in \mathbb{N}$, и функции $Q_l(z) = z^{n_{j_0}} \prod\limits_{i=1}^{i=l} \left(1 - \dfrac{z}{\zeta^f_{j_i}}\right)^{n_{j_i}}$, $l \in \mathbb{N}$. По лемме 1 $\exists \eta > 0$, $C_{f,\eta} > 0$ такие, что выполняется неравенство $|Q_l(z)g(z)| \leqslant |\widetilde{Q_l}(z)\widetilde{g}(z)| \leqslant |\widetilde{f}(z)| \leqslant C_{f,\eta} e^{(\sigma_0 - \eta)h(|z|)}$ $\forall l \in \mathbb{N}$, $\forall z$, $|z| \geqslant 1$. Отсюда последовательность функций $Q_l(z)g(z)$ сходится к $f(z)$ с точностью до константы.

Список литературы

[1] Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87. №4. С. 359–489.

[2] Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 88. №1 (5). С. 4–30.

[3] Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза // Матем. сб. 1972. Т. 88. №3 (7). С. 331–352.

[4] Напалков В. В., Шагапов И. А. Об инвариантных подпространствах в некоторых пространствах числовых последовательностей // Тезисы докладов международ. конф. по комплексному анализу ... ННГУ. Нижний Новгород, 1997. С. 46–50.

[5] Напалков В. В., Шагапов И. А. Замкнутые идеалы в некоторых алгебрах целых периодических функций // Докл. АН. СССР. 1977. Т. 354. №6. С. 739–741.

[6] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.

[7] Levin B. Ya. Distribution of zeros of entire functions. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1980.

[8] Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф. О некоторых характеристиках роста субгармонических функций // Матем. сб. 1978. Т. 103. №1. С. 44–65.

[9] Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В. Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Матем. заметки. 1983. Т. 34. №2. С. 227–236.

[10] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Том II. Дальнейшее построение теории. М.: Наука, 1968.

[11] Харди Г. Г., Литлльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.

[12] Себастьян-и-Сильва Ж. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика 1957. Т. 1. №1. С. 60–77.

[13] Ehrenpreis L. Mean periodic function // Amer. J. Math. 1955. V. 77. №2. P. 293–326.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
E-mail: napalkov@imat.rb.ru

Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. С. 131–135

Обобщение основной теоремы в теории сферических функций

С. М. Никольский

Рассматривается краевая задача первого рода для самосопряженного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами на области в $\mathbb{R}^n$, ограниченной произвольным эллипсоидом, с граничными условиями, определяемыми произвольным многочленом степени N. Доказано, что решение этой задачи также является многочленом степени $\leqslant N$.

Библиография: 3 названия.

Фундаментальная теорема в теории сферических функций гласит: сферическая функция N-й степени, т.е. след на единичной сфере многочлена N-й степени, есть также след на сфере гармонического многочлена той же степени.

Мы обобщаем эту теорему, т.е. вместо оператора Лапласа рассматриваем определенный в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n)$ самосопряженный эллиптический оператор порядка $2l$ ($l = 1, 2, \dots$)

$$Lu = \sum_{|\alpha|,|\beta|=l} a_{\alpha\beta} U^{(\alpha+\beta)}, \tag{1}$$

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha},\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,\ U^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} U}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},\ l = 1, 2, \dots,$$

с постоянными коэффициентами; вместо сферы – эллипсоид $\sigma \subset \mathbb{R}^n$. На ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей σ ($\partial\Omega = \sigma$) для любого многочлена

$$P = P_N(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} c_\alpha x^\alpha,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \qquad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

степени N рассматривается краевая задача первого рода

$$LU = 0, \qquad \left.\frac{\partial^m U}{\partial \nu^m}\right|_\sigma = \left.\frac{\partial^m P}{\partial \nu^m}\right|_\sigma,\ \ m = 0, 1, \dots, l-1, \tag{2}$$

где ν – внешняя нормаль к σ.

Мы доказываем теорему.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 96-01-00212 99-01-01210) и программы "Ведущие научные школы" (проект № 96-15-96102).

Теорема 1. *Для любого многочлена $P = P_N$ степени N решением (очевидно единственным) краевой задачи* (2) *является многочлен степени N.*

Доказательство этого утверждения для сферических функций в 3-мерном случае дано в учебнике С. Л. Соболева [1], а n-мерном – в монографии Стейна и Вейса [2]. Методы, которые там применялись, неприемлемы в нашем случае.

Мы применяем вариационный метод. Отличие от классических рассуждений в нашем случае заключается в том, что данная, определяющая граничные условия, функция есть многочлен $P = P_N$ степени N и ищется решение вариационной задачи тоже среди многочленов N-й степени, имеющих граничные свойства те же, что и у P.

В классическом случае в качестве вариаций берутся бесконечно дифференцируемые финитные в Ω функции. Из них можно строить шапочки, что дает возможность доказать, что найденная минимизирующая вариационную задачу функция удовлетворяет уравнению $LU = 0$.

В данном случае вариациями служат многочлены с нулевыми граничными условиями. Из них шапочки строить нельзя. Все же, пользуясь ими, можно прийти к цели при помощи алгебраических рассуждений.

Дифференциальный оператор (1) связан с билинейной формой

$$L(\xi_\alpha, \eta_\beta) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=l} a_{\alpha\beta}\xi_\alpha\eta_\beta, \qquad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \tag{3}$$

и с положительно определенной квадратичной формой

$$L(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=l} a_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant \varkappa \sum_{|\alpha|=l} \xi_\alpha^2, \tag{4}$$

где $\varkappa > 0$ не зависит от переменных ξ_α.

Форма (3) определяет интегральную форму

$$E(\varphi, \psi) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|=l} a_{\alpha\beta}\varphi^{(\alpha)}\psi^{(\beta)}\,dx,$$

а с ней квадратичную интегральную форму

$$E(\varphi) = E(\varphi, \varphi),$$

где $\varphi = \varphi_N$, $\psi = \psi_N$ – многочлены степени N.

Известно, что выражение

$$\|f\|_{W_2^l(\Omega)} = \|f\|_{L_2(\Omega)} + E(f)^{1/2}$$

можно рассматривать как норму функции f в пространстве $W_2^l(\Omega)$ (см. [3], $\alpha = 0$).

Мы определили билинейную форму (3).

Но нам придется рассматривать еще и другую билинейную форму

$$H(\xi_\alpha, \eta_\beta) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=1} b_{\alpha\beta}\xi_\alpha\eta_\beta, \qquad b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha},$$

на этот раз второго порядка, определяемую также как форма $L(\xi_\alpha, \eta_\mu)$, но при $l = 1$. Ей соответствует многочлен степени 2

$$H(x) = H(x,x) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=1} b_{\alpha\beta}x^{\alpha+\beta} \geqslant \varkappa_1 \sum_{|\alpha|=1} x^{2\alpha} = \varkappa_1|x|^2, \tag{5}$$

где $\varkappa_1 > 0$ не зависит от x, и поверхность $\sigma \subset \mathbb{R}^n$:

$$H(x) = 1.$$

Поверхность σ есть эллипсоид в $\mathbb{R}^n$. Ограниченную область в $\mathbb{R}^n$ с границей σ обозначим через Ω $(\partial\Omega = \sigma)$. Она состоит из точек x, для которых

$$0 \leqslant H(x) < 1, \qquad x \in \Omega. \tag{6}$$

Зададим произвольный многочлен $P = P_N$ степени N и обозначим через $\mathfrak{M}_P$ множество многочленов $\varphi = \varphi_N$ степени N с граничными условиями $\varphi^{(\alpha)}\big|_\sigma = P^{(\alpha)}\big|_\sigma$, $|\alpha| \leqslant l-1$, $\mathfrak{M}_P^*$ – множество многочленов $\varphi = \varphi_N$ с граничными условиями

$$\left.\frac{\partial^m\varphi}{\partial\nu^m}\right|_\sigma = \left.\frac{\partial^m P}{\partial\nu^m}\right|_\sigma, \qquad m = 0, 1, \ldots, l-1.$$

Соответственно при $P = 0$ определяются классы $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_0^*$ и еще класс $\mathfrak{M}_0'$ многочленов $\varphi = \varphi_N$ вида

$$\varphi(x) = [H(x) - 1]^l Q_{N-2l}(x),$$

где Q_{N-2l} – произвольные многочлены степени $N - 2l$.

Очевидно,

$$\mathfrak{M}_0' \subset \mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}_0^*.$$

На самом деле эти три класса совпадают, т.е. $\mathfrak{M}_0' = \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0^*$, но для доказательства теоремы нам этот факт не понадобится.

Переходим к доказательству теоремы.

Зададим многочлен $P = P_N$ степени N, он определяет множество $\mathfrak{M}_P$.

Пользуясь вариационным методом, доказываем существование и единственность многочлена $U = U_N \in \mathfrak{M}_P$, для которого

$$\min_{\varphi\in\mathfrak{M}_P} E(\varphi) = E(U), \qquad U \in \mathfrak{M}_P. \tag{7}$$

Рассуждения здесь ведутся аналогично тому, как это делается в классическом случае (см. [3], где нужно положить $\alpha \equiv 0$).

Таким образом, для найденного многочлена $U \in \mathfrak{M}_P$

$$E(U+v) \geqslant E(U) \quad \forall v \in \mathfrak{M}_0. \tag{8}$$

Поэтому функция от действительного λ

$$E(U+\lambda v) = E(U) + 2\lambda E(U,v) + \lambda^2 F(v) \geqslant 0$$

достигает своего минимума при $\lambda = 0$, а это влечет равенство

$$E(U,v) = 0 \quad \forall v \in \mathfrak{M}_0, \quad U \in \mathfrak{M}_P. \tag{9}$$

Но и обратно, из (9) следует (8).

Мы получили, что неравенство (8) эквивалентно (9).

Но тогда свойства (7) и (9) эквивалентны:

$$(7) \iff (9).$$

При этом свойство (9) формулируется так: существует и притом единственный многочлен $U = U_N \in \mathfrak{M}_P$ степени N, для которого имеет место (9).

Но многочлены $v \in \mathfrak{M}_0$ на σ удовлетворяют граничным условиям $v^{(\alpha)}\big|_\sigma = 0$, $|\alpha| \leqslant l-1$. Это дает возможность в интеграле $E(U,v)$ перебросить знаки производных с v на U и получить равенство

$$E(U,v) = \int_\Omega (LU)v\,dx \quad \forall v \in \mathfrak{M}_0, \quad U \in \mathfrak{M}_P.$$

Мы получили, что существует и при том единственный многочлен $U = U_N \in \mathfrak{M}_P$, для которого

$$\int_\Omega (LU)v\,dx = 0 \quad \forall v \in \mathfrak{M}_0. \tag{10}$$

Так как в (10) знаки производных в пределах порядков α с $|\alpha| \leqslant l-1$ можно перебросить обратно, то это доказывает, что свойства (9) и (10) эквивалентны:

$$(9) \iff (10).$$

Но $\mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}'_0$, поэтому из (10) следует

$$\int_\Omega (LU)Q_{N-2l}(x)[1-H(x)]^l\,dx = 0 \tag{11}$$

для любых многочленов $Q_{N-2l}(x)$ степени $N-2l$. Но $L(U)$ есть тоже многочлен степени $N-2l$, а множитель $[1-H(x)]^l > 0$, $x \in \Omega$ (см. (6)). Поэтому равенство (11) можно трактовать следующим образом: многочлен LU степени $N-2l$

ортогонален на Ω ко всем многочленам Q_{N-2l} той же степени, понимая ортогональность с весом $[1-H(x)]^l$. Но тогда этот многочлен равен нулю

$$LU = 0, \qquad U \in \mathfrak{M}_P. \tag{12}$$

Так как $U \in \mathfrak{M}_P$, то этот многочлен единственный, т.е. это тот многочлен $U \in \mathfrak{M}_P$, который был найден вариационным методом.

Мы таким образом доказали, что найденный вариационным методом многочлен $U = U_N \in \mathfrak{M}_P$ удовлетворяет условию (12). Он единственный, потому что хорошо известно, что задача (12) имеет единственное $2l$-раз непрерывно дифференцируемое решение. Этим доказана

Теорема 2. *Для любого многочлена $P = P_N$ степени N краевая задача на области Ω $(\partial\Omega = \sigma)$*

$$LU = 0, \qquad U^{(\alpha)}\big|_\sigma = P^{(\alpha)}\big|_\sigma, \quad |\alpha| \leqslant l-1,$$

имеет своим (единственным) решением тоже многочлен степени N.

Такие же рассуждения можно провести для класса $\mathfrak{M}_P^*$ и доказать этим теорему 1.

На соответствующих этапах этих рассуждений получим функцию $U = U_N \in \mathfrak{M}_P^*$, минимизирующую вариационную задачу. Для нее верно свойство

$$E(U,v) = 0 \qquad \forall\, v \in \mathfrak{M}_0^*,$$

и так как $\mathfrak{M}_0^* \supset \mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_0'$, то верно это свойство $\forall\, v \in \mathfrak{M}_0$, т.е. мы пришли к справедливости сформулированной в начале теоремы 1.

В заключение без доказательства заметим, что для любой алгебраической поверхности степени $2s > 2$ вида

$$H(x) = 1,$$
$$H(x) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=s} b_{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta} \geqslant \varkappa \sum_{|\alpha|=s} x^{2\alpha}, \qquad b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha},$$

где $H(x) - 1$ – неприводимый многочлен, теоремы 1 и 2 для произвольных многочленов $P = P_N$ степени N уже неверны.

Список литературы

[1] Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М.: ОГИЗ, 1947.
[2] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ в евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
[3] Никольский С. М. Вариационная проблема для уравнения эллиптического типа с вырождениями на границе // Труды МИАН. 1979. Т. 159. С. 212–238.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Об N-членных приближениях по системе Хаара в H^s-нормах

П. Освальд

В [9] мы численно установили, что пространства, порожденные линейными комбинациями некоторых двумерных функций Хаара, приводят к неожиданно хорошим порядкам аппроксимации для решений уравнения потенциала простого слоя на квадрате. Этот эффект связан со свойствами метода аппроксимации по гиперболическим крестам с одной стороны, и наличием сильной сингулярности у решений таких краевых интегральных уравнений с другой. В этой заметке мы установим несколько результатов для приближений по гиперболическим крестам и для наилучших N-членных приближений линейными комбинациями функций Хаара в H^s-нормах $(-1 < s < 1/2)$, что дает теоретическое обоснование наших численных исследований. Насколько нам известно, случай отрицательной гладкости $s < 0$ не рассматривался ранее.

Библиография: 22 названия.

§ 1. Введение

Напомним определение функций Хаара. Обозначим через $\mathscr{D}_j$ систему двоичных интервалов $\Delta = [(i-1)2^{-j}, i2^{-j})$, $i = 1, \dots, 2^j$, длины $|\Delta| = 2^{-j}$, $j \geqslant 0$, из $I \equiv [0,1]$. Характеристическую функцию интервала Δ обозначим χ_Δ. Каждый интервал $\Delta \in \mathscr{D}_j$ разбивается единственным образом на левый (Δ^+) и правый (Δ^-) полуинтервалы из $\mathscr{D}_{j+1}$. Обозначим через

$$\phi_\Delta = |\Delta|^{-1/2}\chi_\Delta, \quad \psi_\Delta = |\Delta|^{-1/2}(\chi_{\Delta^+} - \chi_{\Delta^-}), \qquad \Delta \in \bigcup_{j\geqslant 0} \mathscr{D}_j,$$

одномерный L_2-нормированный индикатор и функцию Хаара для интервала Δ соответственно. Для удобства обозначений определим $\mathscr{D}_{-1} = \{[0,2]\}$ и $\psi_{[0,2]} = \phi_I$. Положим

$$\Psi_j = \{\psi_\Delta : \Delta \in \mathscr{D}_{j-1}\}, \quad \Phi_j = \{\phi_\Delta : \Delta \in \mathscr{D}_j\}, \qquad j \geqslant 0.$$

Одномерная система Хаара

$$\Psi = \bigcup_{j\geqslant 0} \Psi_j$$

является полной ортонормированной системой в $L_2(I)$ (сокращенно *ПОНС*). Ее конечные подсистемы $\Psi_j = \bigcup_{l=0}^{j} \Psi_l$ образуют ортонормированные базисы в пространствах $V_j = \operatorname{span} \Phi_j$ кусочно-постоянных на $\mathcal{D}_j$, $j \geqslant 0$, функций.

Чтобы определить одномерные системы Хаара, примем следующие обозначения: для функций одной переменной ψ_1, ψ_2 обозначим через $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$ функцию двух переменных, заданную равенством $\psi(x) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)$, $x \equiv (x_1, x_2)$. Аналогично для множеств Ψ, Φ одномерных функций, обозначим $\Psi \otimes \Phi = \{\psi \otimes \phi : \psi \in \Psi,\ \phi \in \Phi\}$. Определим

$$\Psi(I^2) = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Psi_j(I^2),$$
$$\Psi_j(I^2) = \begin{cases} \Psi_0 \otimes \Psi_0, & j = 0, \\ (\Psi_j \otimes \Phi_{j-1}) \cup (\Phi_{j-1} \otimes \Psi_j) \cup (\Psi_j \otimes \Psi_j), & j \geqslant 1, \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\Psi^*(I^2) = \bigcup_{j_1, j_2 = 0}^{\infty} \Psi_{j_1, j_2}, \quad \Psi_{j_1, j_2} = \Psi_{j_1} \otimes \Psi_{j_2}, \qquad j_1, j_2 \geqslant 0. \tag{2}$$

Обе системы образуют ПОНС в $L_2(I^2)$. В то время, как $\Psi^*(I^2)$ образована в результате стандартной конструкции тензорного произведения, $\Psi(I^2)$ с точки зрения приложений более популярна, так как носители составляющих ее функций суть двоичные квадраты и лучше локализованы. Грубо говоря, система $\Psi(I^2)$ соответствует *изотропному измельчению*, в то время, как $\Psi^*(I^2)$ обнаруживает *анизотропное поведение*.

В этой работе мы изучим нелинейные приближения в пространствах Соболева $H^s(I^2)$, $-1 < s < 1/2$, по системе $\Psi^*(I^2)$. В частности, мы рассмотрим *порядки наилучших N-членных приближений* относительно $\Psi^*(I^2)$, т.е. оценки для величин

$$e_N^*(f)_s = \inf_{\Psi \subset \Psi^*(I^2) : \#\Psi \leqslant N} e_\Psi(f)_s, \quad N \to \infty$$
$$\left(e_\Psi(f)_s = \inf_{g \in \operatorname{span} \Psi} \|f - g\|_{H^s} \right) \tag{3}$$

при различных ограничениях на f. Иногда мы будем сравнивать поведение $e_N^*(f)_s$ с аналогично определенными наилучшими N-членными приближениями $e_N(f)_s$ относительно системы $\Psi(I^2)$. Так как рассматриваемые системы Хаара являются ПОНС в $L_2(I^2)$ (и базисами Рисса в $H^s(I^2)$ для $-1/2 < s < 1/2$, см. ниже), этот вопрос мог бы показаться скорее тривиальным, поэтому нам видится необходимым привести некоторую мотивировку.

В первую очередь, эта проблематика возникла из нашего исследования [9] метода Галеркина для *уравнения потенциала простого слоя*

$$Tf \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{I^2} \frac{f(y)}{|x - y|_2}\, dy = g(x), \tag{4}$$

на I^2, которое может быть применено в электростатике. В вариационной постановке (4) приводит к симметричной положительноопределенной вариационной задаче в $H^{-1/2}(I^2)$. Из-за особенностей методов дискретизации краевых интегральных уравнений этого типа (плотных матриц дискретизации), повышенный интерес вызывают пространства дискретизаций малой размерности с хорошими $H^{-1/2}$-аппроксимационными свойствами для слабых решений (4). Недавно были проведены широкие исследования, посвященные *адаптивным всплесковым методам*, см. обзор в [2]. Теоретически, эти методы связаны с наилучшими N-членными приближениями по системам, таким как $\Psi(I^2)$, см. [2], [3]. Альтернативный, так называемый *hp-метод граничных элементов*, основанный на применении кусочно-полиномиальных функций с измельчаемым разбиением и изменяемой степенью полиномов, был опробован в [16], и дал экспоненциальную скорость сходимости для достаточно гладких g.

В [9] нами были исследованы возможности *пространств по гиперболическим крестам*, т.е. мы рассмотрели выбор $\Psi_J^*(I^2) = \bigcup\limits_{j_1+j_2\leqslant J} \Psi_{j_1,j_2}$ в методе Галеркина для (4). В связи с методами конечных и граничных элементов, этот метод аппроксимации был назван *методом редкой решетки* [22]. Оценки погрешности связаны с наилучшими приближениями $e_{\Psi_J^*(I^2)}(f)_{-1/2}$, см. [9]. При определенных дополнительных условиях на смешанные производные (см. [17] для соответствующей теории в периодическом случае), эти оценки, выраженные в зависимости от размерности пространства приближающих функций, показывают преимущество метода редкой решетки над стандартными аппроксимационными схемами, которые обычно используют существенно более массивные множества $\Psi_J(I^2) = \bigcup\limits_{j=0}^{J} \Psi_j(I^2)$ или $\Phi_J(I^2) = \Phi_J \otimes \Phi_J$. К сожалению, решения (4) не удовлетворяют этим условиям регулярности. Например, если $g(x) \equiv 1$ в (4) (*задача емкости*), тогда решение f принадлежит $H^{-\varepsilon}(I^2)$ для любого $\varepsilon > 0$, но не принадлежит $L_2(I^2)$. Это происходит из-за сингулярного поведения f вблизи вершин и сторон I^2 (см. § 3). В нашем численном эксперименте в [9], нами обнаружено неожиданно хорошая скорость сходимости, когда мы пытались компенсировать сингулярное поведение построением *адаптированных пространств редких решеток*

$$V_\Psi = \operatorname{span}\Psi, \qquad \Psi \subset \Psi^*(I^2), \quad \#\Psi \leqslant N, \tag{5}$$

выбирая определенным способом функции $\psi \in \Psi^*(I^2)$, с носителем вдоль сторон и вблизи вершин. Все эти соображения послужили сильной мотивировкой для исследования асимптотического поведения наилучших N-членных приближений (3), $N \to \infty$, в особенности для $s = -1/2$ и типичных решений (4).

С другой стороны, вопросы *эффективной характеризации* для наилучших N-членных приближений относительно систем полученных тензорным произведением таких, как $\Psi_J^*(I^2)$, являются, в основном, открытыми (напротив, связь между асимптотическим поведением величин $e_N(f)_s$ (и их обобщений для L_p) и гладкостью f хорошо изучены [3]). Лишь немногие статьи касались схожих вопросов [5], [8], [18]. Таким образом, мы полагаем, что изучение некоторых специальных случаев будет способствовать лучшему пониманию этой проблемы. В частности, случай $s < 0$ обнаруживает некоторый новый интересный эффект.

Данная статья организована следующим образом. В § 2 собраны некоторые вспомогательные результаты. Так как этот материал в основном известен и освещен в [9], [13] (или может быть относительно легко получен из других источников процитированных ниже), доказательства здесь сведены до минимума. Мы дадим краткий обзор результатов об H^s-приближениях ($s < 0$) в периодическом случае, чтобы привлечь внимание читателя к некоторым различиям в случае $s \geqslant 0$, рассмотренном в [17]. Затем устанавливается точная связь между коэффициентами Фурье–Хаара и H^s-нормами функций. Там же будут даны используемые нами определения пространств Соболева $H^s(I^2)$ и $H^t_{\text{mix}}(I^2)$ (с доминирующей смешанной t-й производной). В конце мы приведем некоторые результаты о регулярности для (4).

Параграф 3 содержит основные результаты, посвященные *верхним оценкам* величин (3), $-1 < s < 1/2$, для $f \in H^t_{\text{mix}}(I^2)$ или если $f \in L_1(I^2)$ и обладает определенными условиями на производные (позволяющие некоторую сингулярность вблизи ∂I^2). Некоторые из этих результатов точны. Для решения (4) с гладкой правой частью g из этих результатов следует оценка

$$e_N^*(f)_{-1/2} \leqslant C_f N^{-5/4}, \qquad N \to \infty, \tag{6}$$

что дает лучший порядок аппроксимации, чем $e_N(f)_{-1/2}$. Численная проверка и приложения не будут освещены здесь.

В работе мы придерживаемся следующих обозначений: $A \asymp B$ обозначает двустороннее неравенство между выражениями A и B, т.е. $c \cdot B \leqslant A \leqslant C \cdot B$, где $C, c > 0$ – константы, значения которых могут быть в разных местах разными. Зависимость этих констант от параметров не будет отмечаться каждый раз и будет очевидна из контекста. $\#\mathscr{A}$ обозначает число различных элементов конечного множества $\mathscr{A}$. Для нормированных пространств X, Y, запись $X \cong Y$ означает, что пространства идентичны как множества и их нормы эквивалентны: $\|\cdot\|_X \asymp \|\cdot\|_Y$. Большинство исследованных ниже пространств являются гильбертовыми пространствами, которые мы определим, задавая только соответствующую норму (предполагая, что читатель может восстановить ассоциированное скалярное произведение).

§ 2. Определения и вспомогательные результаты

2.1. Периодический случай. Этот параграф включен только для того, чтобы лучше сориентировать читателя в последующем изложении и привлечь внимание к некоторым различиям между H^s-аппроксимацией с $s < 0$ и $s \geqslant 0$. Для простоты, определим периодические соболевские пространства непосредственно через формальные ряды Фурье (периодические распределения) следующим образом. Для $-\infty < s < \infty$ положим

$$H^s(\mathbb{T}^d) = \left\{ f(\theta) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} c_\alpha e^{-i\alpha\theta} : \|f\|_{H^s} \equiv \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} (1+|\alpha|)^{2s} |c_\alpha|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

и

$$H^s_{\mathrm{mix}}(\mathbb{T}^d) = \left\{ f(\theta) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} c_\alpha e^{-i\alpha\theta} : \right.$$

$$\left. \|f\|_{H^s_{\mathrm{mix}}} \equiv \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \left(\prod_{k=1}^{d} (1+|\alpha_k|)^{2s} \right) |c_\alpha|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Далее мы считаем $d \geqslant 1$ фиксированным (в некоторых случаях мы ограничимся случаем $d = 2$). Очевидно, для $s \geqslant 0$ определенные выше пространства включены в $L_2(\mathbb{T}^d)$, и $H^{-s}(\mathbb{T}^d) \cong H^s(\mathbb{T}^d)'$ по определению двойственного пространства. В частности, коэффициенты Фурье $f \in H^{-s}(\Omega)$ могут быть получены как значение ассоциированного функционала $f \in H^s(\mathbb{T}^d)'$ вычисленного от $e^{-i\alpha\theta} \in H^s(\mathbb{T}^d)$. Для $H^s_{\mathrm{mix}}(\mathbb{T}^d)$ возможна аналогичная интерпретация. Так, будучи связанными с L_2-интегрируемостью, пространства Соболева в сущности сводятся к пространствам последовательностей коэффициентов Фурье (случай L_p, $p \neq 2$, существенно более сложен, см. [17]).

Определим пространства по гиперболическим крестам $V_n^*(\mathbb{T}^d) \equiv V_{\Psi_n^*(\mathbb{T}^d)}$, полагая

$$\Psi_n^*(\mathbb{T}^d) = \left\{ e^{-i\alpha\theta} : \alpha \in \mathbb{Z}^d, \ \prod_{k=1}^{d} (1+|\alpha_k|) \leqslant n \right\}, \qquad n \geqslant 1.$$

Аппроксимация по гиперболическим крестам соответствует аппроксимации кусочно-постоянными функциями по $\Psi_J^*(I^2)$ (если положить $d = 2$, $n = 2^J$, и заменить экспоненты функциями Хаара). Заметим, что $\#\Psi_n^*(\mathbb{T}^d) \asymp n(1+\log n)^{d-1}$. Определения для наилучших приближений по гиперболическим крестам аналогичны тем, что даны во введении, с той лишь разницей, что теперь мы берем $\Psi \subset \Psi^*(\mathbb{T}^d) \equiv \{e^{-i\alpha\theta} : \alpha \in \mathbb{Z}^d\}$. Следующее утверждение показывает различие порядков аппроксимаций при $s < 0$ и $s \geqslant 0$.

Предложение 1. *Пусть $f \in H^t_{\mathrm{mix}}(\mathbb{T}^d)$.*

a) *Наилучшие H^s-приближения по гиперболическим крестам $\Psi_n^*(\mathbb{T}^d)$, $n \geqslant 1$, удовлетворяют неравенству*

$$e_{\Psi_n^*(\mathbb{T}^d)}(f)_s \leqslant C\|f\|_{H^t_{\mathrm{mix}}} \begin{cases} n^{-(t-s)}, & 0 \leqslant s < t < \infty, \\ n^{-(t-s/d)}, & s < 0, \ s/d < t < \infty. \end{cases} \tag{7}$$

b) *Наилучшие N-членное приближения по $\Psi^*(\mathbb{T}^d)$ in $H^s(\mathbb{T}^d)$, $N \geqslant 1$, удовлетворяют неравенству*

$$e_N^*(f)_s \leqslant C\|f\|_{H^t_{\mathrm{mix}}} \begin{cases} N^{-(t-s)}, & 0 < s < t < \infty, \\ N^{-t}(1+\log N)^{(d-1)t}, & s = 0 < t < \infty, \\ N^{-(t-s/d)}, & s < 0, \ s/d < t < \infty. \end{cases} \tag{8}$$

Оценки (7), (8) точны по порядку для класса $H^t_{\mathrm{mix}}(\mathbb{T}^d)$, и не могут быть распространены на другие значения параметров (s,t).

Случай $s=0$ следует из более общих результатов [17; гл. III] (если положить там $p=q=2$, $r=t$). Все верхние оценки следуют из неравенства

$$e_\Psi(f)_s^2 \leqslant \max_{\alpha\notin\Lambda_\Psi} \frac{(1+|\alpha|)^{2s}}{\prod_{k=1}^d (1+|\alpha_k|)^{2t}} \|f\|^2_{H^t_{\mathrm{mix}}}, \qquad \Psi\subset\Psi^*(\mathbb{T}^d),$$

где $\Lambda_\Psi = \{\alpha\in\mathbb{Z}^d : e^{-i\alpha\theta}\in\Psi\}$, если положить $\Psi=\Psi^*_n(\mathbb{T}^d)$ для a) и $s=0$ для b), случай $s\neq 0$ в b) требует некоторой модификации. Мы оставляем доказательство и построение контрпримеров читателю (некоторые подсказки могут быть найдены в § 3, где доказываются похожие утверждения для двумерной системы Хаара (2)).

Заметим, что утверждение b) позволяет судить о потенциале нелинейных N-членных приближений. Более интереснее было бы найти, какие свойства f могут гарантировать определенный порядок N-членной аппроксимации, чем знать порядки наихудшей возможной аппроксимации функции из выбранного a priori большого класса, такого как $H^t_{\mathrm{mix}}(\mathbb{T}^d)$, (см. [3]). Так как $\Psi^*(\mathbb{T}^d)$ образует, после соответствующей нормировки, ПОНС в любом из гильбертовых пространств $H^s(\mathbb{T}^d)$, можно найти, следуя Э. Шмидту и С.Б. Стечкину, *необходимые и достаточные условия* для оценок вида

$$e^*_N(f)_s \leqslant CN^{-r}, \qquad N\to\infty,$$

в терминах коэффициентов Фурье f, см. [6], [3; sect. 5] (это также альтернативный путь для доказательства (8)).

Мы сформулировали этот результат, чтобы показать, что H^s-аппроксимация на пространствах функций с ограниченными смешанными производными проявляет качественно различное поведение при $s<0$ и $s>0$. А именно, при $s<0$ оценки снова становятся *зависимыми от размерности.* Избавиться от *d-зависимости* было основной целью рассмотрения гиперболических крестов в некоторых практических приложениях. Простое объяснение, почему $-s$ должно быть заменено на $-s/d$, можно дать, заметив, что вложения

$$H^t_{\mathrm{mix}}(\mathbb{T}^d)\subset H^s_{\mathrm{mix}}(\mathbb{T}^d)\subset H^s(\mathbb{T}^d), \qquad 0\leqslant s<t<\infty,$$

не выполнены при $s<0$, и могут быть заменены только на

$$H^t_{\mathrm{mix}}(\mathbb{T}^d)\subset H^{s/d}_{\mathrm{mix}}(\mathbb{T}^d)\subset H^s(\mathbb{T}^d), \qquad s/d<t<\infty,\ \ s<0.$$

2.2. Коэффициенты Фурье–Хаара и соболевские нормы. Мы дадим определение пространств Соболева на I^d в удобной для нас форме (для обобщений на пространства Бесова–Соболева, а также в связи с методами аппроксимаций см. [1], [11], [12], [19]). Пусть сперва $d = 1$. Положим $H^0(I) = L_2(I)$, и

$$H^m(I) = \left\{f \in L_2(I) : f^{(m)} \in L_2(I),\ \|f\|_{H^m} = \left(\|f\|^2_{L_2} + \|f^{(m)}\|^2_{L_2}\right)^{1/2}\right\}$$

для целых $m \geqslant 1$. Для оставшихся $s > 0$ используем вещественную интерполяцию, чтобы определить

$$H^s(I) = [L_2(I), H^m(I)]_{s/m,2}, \qquad 0 < s < m$$

(использование разных $m > s$ приводит к тому же пространству, с эквивалентными нормами). $H^s(I)$ могут быть отождествлены с пространствами Бесова

$$H^s(I) \cong B^{s;m}_{2,2}(I) = \left\{f \in L_2 : \|f\|_{B^{s;m}_{2,2}} = \left(\|f\|^2_{L_2} + \sum_{l=1}^{\infty} 2^{2ls}\omega_m(2^{-l}, f)^2_{L_2}\right)^{1/2} < \infty\right\},$$
$$0 < s < m,$$

где $\omega_m(2^{-l}, f)_{L_2}$ обозначает L_2-модуль непрерывности функции $f \in L_2(I)$ порядка m (детали см. в [4], [19]). Этот факт дает способ описать классы $H^s(I)$ через их аппроксимационные свойства (см. ниже для случая системы Хаара).

Для случая $s < 0$, используется двойственность. Положим

$$\|f\|_{H^s(I)} = \sup_{0 \neq v \in H^{-s}(I)} \frac{(f, v)_{L_2}}{\|v\|_{H^{-s}}}, \qquad f \in L_2(I), \quad s < 0, \tag{9}$$

и определим $H^s(I)$ как замыкание $L_2(I)$ по норме (9). Это определение эквивалентно $H^s(I) = H^{-s}(I)'$, $s < 0$, так как вложение $H^{-s}(I) \subset L_2(I)$ плотно. Мы предпочли первое определение, так как это единственный способ работать с H^s-нормами при $s < 0$, избегая введения обобщенных функций. Все двойственные пространства ниже следует понимать аналогично.

Пространства Соболева при $d > 1$ будут определены при помощи тензорного произведения. Определения тензорного произведения гильбертовых пространств и операторов, действующих на них, могут быть найдены в [21]. Все результаты, использованные здесь, элементарны, и могут быть легко выведены из фактов, данных в [21]. Для простоты ограничимся случаем $d = 2$. Положим

$$H^{s_1,s_2}_{\mathrm{mix}}(I^2) = H^{s_1}(I) \otimes H^{s_2}(I), \qquad -\infty < s_1, s_2 < \infty,$$

и определим

$$H^s(I^2) = \begin{cases} H^{s,0}_{\mathrm{mix}}(I^2) \cap H^{0,s}_{\mathrm{mix}}(I^2), & s \geqslant 0, \\ H^{-s}(I^2)', & s < 0, \end{cases} \qquad H^s_{\mathrm{mix}}(I^2) = H^{s,s}_{\mathrm{mix}}(I^2). \tag{10}$$

Для гильбертовых пространств X, Y определим норму на пересечении $X \cap Y$, как $\|f\|^2_{X\cap Y} = \|f\|^2_X + \|f\|^2_Y$. $H^s_{\mathrm{mix}}(I^2)$ называется пространством Соболева с доминирующий смешанной производной порядка s. Нетрудно показать, что

$$\|f\|^2_{H^1_{\mathrm{mix}}} \asymp \|f\|^2_{L_2} + \|D^{(1,0)}f\|^2_{L_2} + \|D^{(0,1)}f\|^2_{L_2} + \|D^{(1,1)}f\|^2_{L_2} \quad \forall f \in H^1_{\mathrm{mix}}(I^2).$$

Из определения тензорного произведения гильбертовых пространств следует, что $(X \otimes Y)' \cong X' \otimes Y'$, и, следовательно, $H^s_{\mathrm{mix}}(I^2) \cong H^{-s}_{\mathrm{mix}}(I^2)'$, $s < 0$.

Нас интересует связь между соболевскими нормами и коэффициентными нормами для рядов Фурье–Хаара. В отличие от раздела 2.1, ограничения на параметры s, t следует ожидать в связи с явлением насыщения для кусочно-постоянной аппроксимации и ограничением на гладкости ступенчатых функций. Стоит начать с одномерного случая. Определим пространства $A^s(I)$ при $s \geqslant 0$, полагая

$$A^s(I) = \left\{ f \in L_2(I) : \|f\|_{A^s} = |||f|||_s \equiv \left(\sum_{\Delta\in\mathcal{D}} |\Delta|^{-2s} c_\Delta(f)^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}, \tag{11}$$

где $c_\Delta(f) = (f, \psi_\Delta)_{L_2}$ – коэффициенты Фурье–Хаара f, и

$$f = \sum_{\Delta\in\mathcal{D}} c_\Delta(f)\psi_\Delta, \qquad \mathcal{D} \equiv \bigcup_{j=-1}^{\infty} \mathcal{D}_j,$$

есть ряд Фурье–Хаара (эти определения могут быть записаны для любой функции $f \in L_1(I)$, см. [10] для набора основных фактов о системе Хаара). Вложение $A^s(I) \subset L_2(I)$ непрерывно и плотно при $s > 0$; при $s = 0$ эти пространства совпадают. В случае $s < 0$ определим $A^s(I)$ как замыкание $L_2(I)$ в норме $|||\cdot|||_s$ введенной в (11). Благодаря базисности Ψ в $L_2(I)$ имеем

$$|||f|||_s = \sup_{0\neq v\in A^{-s}(I)} \frac{(f,v)_{L_2}}{|||v|||_{-s}}, \qquad f \in L_2(I), \tag{12}$$

и, следовательно, $A^s(I) \cong A^{-s}(I)'$ при $s < 0$. Однако выражение $|||f|||_s$ не обязательно имеет смысл для любой $f \in A^s(I^d)$, $s < 0$, так как коэффициенты Фурье–Хаара могут быть не определены должным образом.

Очевидно, $H^0(I) = L_2(I) = A^0(I)$ при $s = 0$. Прямые и обратные неравенства для приближений по системе Хаара в $L_p(I)$ были получены Ульяновым [20] и Голубовым [7] (см. также [4]), и, в сочетании с $H^s(I) \cong B^{s,1}_{2,2}(I)$, $0 < s < 1$, привели к

$$\|f\|_{A^s} \leqslant C\|f\|_{H^s} \quad \forall f \in H^s(I), \ \ 0 < s < 1,$$
$$\|f\|_{H^s} \leqslant C\|f\|_{A^s} \quad \forall f \in A^s(I), \ \ 0 < s < \frac{1}{2}.$$

Пользуясь этими оценками вместе с (9) и (12), легко вывести двойственные оценки для $s < 0$:

$$\|f\|_{A^s} \leqslant C\|f\|_{H^s} \quad \forall f \in H^s(I), \quad -\frac{1}{2} < s < 0,$$
$$\|f\|_{H^s} \leqslant C\|f\|_{A^s} \quad \forall f \in A^s(I), \quad -1 < s < 0.$$

Действительно, возьмем произвольную $f \in L_2(I)$ и $-1/2 < s < 0$. Тогда $0 < -s < 1/2$, и мы имеем

$$\|f\|_{A^s} \sup_{0 \neq v \in A^{-s}(I)} \frac{(f,v)_{L_2}}{\|v\|_{A^{-s}}} \leqslant C^{-1} \sup_{0 \neq v \in H^{-s}(I)} \frac{(f,v)_{L_2}}{\|v\|_{H^{-s}}} = C^{-1}\|f\|_{H^s}.$$

Используя полноту пространства $L_2(I)$ в $H^s(I)$, легко вывести первое неравенство для всех $f \in H^s(I)$, $-1/2 < s < 0$. Доказательство второго неравенства аналогично. Таким образом, установлено

Предложение 2. *Для пространств A^s ассоциированных с одномерной системой Хаара Ψ, выполнены неравенства*

$$\|f\|_{A^s} \leqslant C\|f\|_{H^s} \quad \forall f \in H^s(I), \quad -\frac{1}{2} < s < 1,$$
$$\|f\|_{H^s} \leqslant C\|f\|_{A^s} \quad \forall f \in A^s(I), \quad -1 < s < \frac{1}{2}.$$

В частности, $H^s(I) \cong A^s(I)$ тогда и только тогда, когда $-1/2 < s < 1/2$. Тем самым, нормализированная система Хаара

$$\Psi^s = \left\{ \psi_\Delta^s \equiv |\Delta|^s \psi_\Delta : \Delta \in \bigcup_{j=-1}^{\infty} \mathcal{D}_j \right\}$$

образует базис Рисса в $H^s(I)$ тогда и только тогда, когда $-1/2 < s < 1/2$.

То, что неравенства не выполнены при $s \geqslant 1$ в первом случае и при $s \geqslant 1/2$ во втором, следует из свойства насыщения для приближений кусочнопостоянными функциями (например для $f(x) = x$), и того факта, что функции Хаара ψ_Δ, $\Delta \in \mathcal{D}_j$, $j \geqslant 0$, не принадлежат $H^{1/2}(I)$. Контрпример, для которого первое неравенство не выполнено при $s = -1/2$ содержится в [13; раздел 4].

Пользуясь тем, что система Хаара является полным ортогональным базисом в $A^s(I)$ (по определению), нетрудно выразить нормы пространств

$$A^{s_1,s_2}(I^2) = A^{s_1}(I) \otimes A^{s_2}(I), \qquad -\infty < s_1, s_2 < \infty,$$

как

$$\|f\|_{A^{s_1,s_2}} = \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^*(I^2)} |\Delta'|^{-2s_1} |\Delta''|^{-2s_2} c_\Delta(f)^2 \right)^{1/2}, \quad f \in A^{s_1,s_2}(I^2) \cap L_2(I^2),$$

где $c_\Delta(f) = \int_{I^2} f(x)\psi_\Delta(x)\,dx$ обозначает коэффициент Фурье–Хаара функции f при $\psi_\Delta \in \Psi^*(I^2)$. В дальнейшем мы будем придерживаться следующих обозначений:

$$\mathscr{D}^*(I^2) = \bigcup_{j_1,j_2=0}^{\infty} \mathscr{D}_{j_1,j_2},$$

$$\mathscr{D}_{j_1,j_2} = \{\Delta \equiv \Delta' \times \Delta'' : \Delta' \in \mathscr{D}_{j_1-1},\ \Delta' \in \mathscr{D}_{j_2-1}\}, \qquad j_1, j_2 \geqslant 0,$$

и $\psi_\Delta \equiv \psi_{\Delta'} \otimes \psi_{\Delta''}$, для соответствующих функций Хаара. Через

$$d(\Delta) = \min\{|\Delta'|, |\Delta''|\}$$

мы обозначим длину наибольшей из сторон прямоугольника Δ. Затем, вспомнив определения пространств Соболева $H^s(I^2)$, $H^s_{\text{mix}}(I^2)$ и $H^{s_1,s_2}(I^2)$, естественно определить следующие пространства:

$$A^s(I^2) = \begin{cases} \left\{ f \in L_2(I^2) : \|f\|_{A^s} = \Big(\sum\limits_{\Delta \in \mathscr{D}^*(I^2)} d(\Delta)^{-2s} c_\Delta(f)^2 \Big)^{1/2} < \infty \right\}, & s \geqslant 0, \\ A^{-s}(I^2)', & s < 0, \end{cases} \tag{13}$$

и

$$A^s_{\text{mix}}(I^2) = A^{s,s}_{\text{mix}}(I^2), \qquad A^{s_1,s_2}_{\text{mix}}(I^2) = A^{s_1}(I) \otimes A^{s_2}(I), \\ -\infty < s, s_1, s_2 < \infty. \tag{14}$$

Для $f \in A^s(I^2) \cap L_2(I^2)$ данное выше выражение для $\|f\|_{A^s}$ может быть использовано при $s < 0$. Аналогично,

$$\|f\|_{A^{s_1,s_2}_{\text{mix}}} = \Big(\sum_{\Delta \in \mathscr{D}^*(I^2)} |\Delta'|^{-2s_1} |\Delta''|^{-2s_2} c_\Delta(f)^2 \Big)^{1/2}, \\ f \in A^{s_1,s_2}_{\text{mix}}(I^2) \cap L_2(I^2). \tag{15}$$

Заметим, что $A^s(I)^2 \cong A^{s,0}_{\text{mix}}(I^2) \cap A^{0,s}_{\text{mix}}(I^2)$ при $s \geqslant 0$ по определению $d(\Delta)$.

Сейчас мы можем сформулировать очевидное следствие предложения 2.

Предложение 3. *$A^s(I^2)$-нормы (13), соответствующие двумерной системе Хаара $\Psi^*(I^2)$, удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned} \|f\|_{A^s} &\leqslant C\|f\|_{H^s} \quad \forall f \in H^s(I^2), \\ \|f\|_{A^s_{\text{mix}}} &\leqslant C\|f\|_{H^s_{\text{mix}}} \quad \forall f \in H^s_{\text{mix}}(I^2), \end{aligned} \qquad -\frac{1}{2} < s < 1, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^s} &\leqslant C\|f\|_{A^s} \quad \forall f \in A^s(I^2), \\ \|f\|_{H^s_{\text{mix}}} &\leqslant C\|f\|_{A^s_{\text{mix}}} \quad \forall f \in A^s_{\text{mix}}(I^2), \end{aligned} \qquad -1 < s < \frac{1}{2}. \tag{17}$$

В частности, $H^s(I^2) \cong A^s(I^2)$ и $H^s_{\text{mix}}(I^2) \cong A^s_{\text{mix}}(I^2)$ тогда и только тогда, когда $-1/2 < s < 1/2$.

Чтобы увидеть, как предложение 3 следует из предложения 2, необходимо применить тот факт, что если гильбертовы пространства X_k, Y_k удовлетворяют условиям $X_k \subset Y_k$ (вложения непрерывны), $k = 1, 2$, то $X_1 \otimes X_2 \subset Y_1 \otimes Y_2$ с непрерывным оператором вложения. Аналогичное утверждение может быть сформулированно для системы Хаара $\Psi(I^2)$ (см. (1)) и пространств $H^s(I^2)$ (но не для $H^s_{\mathrm{mix}}(I^2)$), см. [13].

В §3 мы воспользуемся первым неравенством в (17) и вторым неравенством в (16), чтобы свести изучение H^s-приближений функций из пространств H^t_{mix} к оценкам в соответствующих пространствах $A^s(I^2)$ и $A^t_{\mathrm{mix}}(I^2)$. Нам также понадобятся некоторые обобщения предложения 3. Во-первых, нам понадобятся оценки H^s-норм специального типа функций $f \in L_1(I^2)$, для которых (17) обобщается следующим образом. Предположим, что $f \in L_1(I^2)$ удовлетворяет условию

$$|||f|||_s^2 = \sum_{\Delta\in\mathcal{D}^*(I^2)} d(\Delta)^{-2s} c_\Delta(f)^2 < \infty \tag{18}$$

при некоторых $-1 < s < 1/2$. При $s \geqslant 0$ имеем $f \in L_2(I^2)$ и $f \in A^s(I^2)$ с $\|f\|_{A^s} = |||f|||_s$. Следовательно, если $0 \leqslant s < 1/2$, то согласно (17) получим $f \in H^s(I^2)$ и $\|f\|_{H^s} \leqslant C|||f|||_s$. Для $s < 0$ рассмотрим частные суммы (по квадратам) ряда Фурье–Хаара f:

$$v_j(f) = \sum_{\Delta\in\mathcal{D}^*:\, d(\Delta)\geqslant 2^{-j}} c_\Delta(f)\psi_\Delta, \qquad j \geqslant 0.$$

Из предположений немедленно следует, что $\{v_j(f)\} \subset L_2(I^2)$ образуют фундаментальную последовательность в $A^s(I^2)$, и сходятся к $\tilde f \in A^s(I^2)$ с $\|\tilde f\|_{A^s} = |||f|||_s$. Более того, если $-1 < s < 0$, то из (17) следует, что $\tilde f \in H^s(I^2)$ с $\|\tilde f\|_{H^s} \leqslant C|||f|||_s$. Таким образом, при предположении (18), имеем

$$\|\tilde f\|_{H^s} \leqslant C|||f|||_s, \qquad -1 < s < \frac{1}{2}, \quad f \in L_1(I^2), \tag{19}$$

где $\tilde f = \lim\limits_{j\to\infty} v_j(f)$ – элемент $H^s(I^2) \subset A^s(I^2)$. Так как $v_j(f) \to f$ в $L_1(I^d)$, мы можем отождествить f и $\tilde f$.

Нам также понадобится ослабленное обобщение второго неравенства в (16) при $s = 1$:

$$2^{2(j_1+j_2)} \sum_{\Delta\in\mathcal{D}_{j_1,j_2}} |c_\Delta(f)|^2 \leqslant C\|f\|^2_{H^1_{\mathrm{mix}}}, \qquad j_1, j_2 \geqslant 0, \quad f \in H^1_{\mathrm{mix}}(I^2). \tag{20}$$

Это неравенство выводится с помощью тензорных произведений (см. [9]) из одномерного неравенства типа Джексона

$$\sum_{\Delta\in\mathcal{D}_{j-1}} |c_\Delta(f)|^2 \leqslant \Bigg\| f - \sum_{\Delta\in\bigcup_{l=-1}^{j-2}\mathcal{D}_l} c_\Delta(f)\psi_\Delta \Bigg\|^2_{L_2} \leqslant C2^{-j}\|f\|^2_{H^1}, \quad j \geqslant 0, \ f \in H^1(I).$$

2.3. Сингулярные функции. Здесь мы введем простой класс сингулярных функций. Мы будем рассматривать функции $f \in L_1(I^2)$, которые имеют непрерывные производные $D^{(k,l)}f$ порядка $k, l \leqslant m$ на *внутренности* I^2. Для $0 \leqslant \alpha, \beta < 1$, будем называть f *функцией с сингулярностью на краю типа* $(m; \alpha, \beta)$ относительно $(0,0)$, если ее частные производные мажорируются следующим образом:

$$|D^{(k,l)}f(x_1, x_2)| \leqslant C x_1^{-(\alpha+k)} x_2^{-(\beta+l)}, \qquad x_1, x_2 \in (0,1), \quad 0 \leqslant k, l \leqslant m. \tag{21}$$

Для $0 \leqslant \alpha < 2$, будем называть f *функцией с сингулярностью в вершине* $(0,0)$ *типа* $(m; \alpha)$, если ее частные производные мажорируются следующим образом:

$$\begin{gathered} |D^{(k,l)}f(x_1, x_2)| \leqslant C r^{-(\alpha+k+l)}, \\ r \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x_1, x_2 \in (0,1), \quad 0 \leqslant k, l \leqslant m. \end{gathered} \tag{22}$$

Аналогичные понятия вводятся для других вершин I^2. Введенные определения предназначены для работы с сильными сингулярностями. Заметим, что в основном мы будем работать с *мажорантами*, в то время как сами функции могут быть намного более общими. Например, с помощью дифференцирования легко показать, что функция $f(x, y) = r^{-\gamma} x_1^{-\alpha} x_2^{-\beta}$ является функцией с сингулярностью на краю типа $(m; \alpha', \beta')$, где $\alpha' = \max(\alpha + \gamma, \alpha)$, $\beta' = \max(\beta + \gamma, \beta)$. Из последующих рассуждений будет видно, что можно было бы ограничиться некоторыми более слабыми условиями, например, в некоторых случаях было бы достаточно потребовать локальные L_1-оценки для функции g и ее производных m-го порядка. Более детальное рассмотрение потребовало бы также введения логарифмических членов. Однако, здесь мы будем работать только с введенными определениями сингулярных функций. Для аппроксимации по системам Хаара нам понадобится только случай $m = 1$.

Отметим здесь, что решение f уравнения (4) при $g \in H^3(I^2)$ разлагается в сумму (см. [14], [15])

$$f = f^{\text{reg}} + f^{\text{sing}}, \qquad f^{\text{reg}} \in H^2(I^2) \subset H^1_{\text{mix}}(I^2), \tag{23}$$

где сингулярная часть f^{sing} является линейной комбинацией функций с сингулярностями на краю типа $(m; 1-\gamma, 1-\gamma)$ $(\gamma = 0.2966\ldots)$ соответствующими вершинам I^2. В частности, (23) выполнено для решения уравнения потенциала, где $g(x) = 1$. Как мы увидим, этой информации для наших целей достаточно. Из [15] также следует, что f^{sing} может быть представлена в виде линейной комбинации функций с сингулярностью на краю типа $(m; 1/2, 1/2)$ и *функций с сингулярностью в вершинах* типа $(m; 1-\gamma)$. Параметры $\alpha = \beta = 1/2$ и $\alpha = 1 - \gamma$, соответственно, точны, $m \geqslant 1$ может быть выбрано произвольно.

§ 3. Наилучшие N-членные приближения по $\Psi^*(I^2)$

Докажем сперва аналог предложения 1 для системы Хаара.

Теорема 4. *Пусть $-1 < s < 1/2$, $-1/2 < t < 1$, и $f \in H^t_{\mathrm{mix}}(I^2)$.*

a) *Наилучшие H^s-приближения относительно пространств по гиперболическим крестам $V^*_J(I^2) \equiv V_{\Psi^*_J(I^2)}$, $J \geqslant 0$, удовлетворяют неравенству*

$$e_{\Psi^*_J(I^2)}(f)_s \leqslant C\|f\|_{H^t_{\mathrm{mix}}} \begin{cases} 2^{-J(t-s)}, & 0 \leqslant s < t, \\ 2^{-J(t-s/2)}, & s < 0,\ s/2 < t. \end{cases} \tag{24}$$

b) *Наилучшие N-членные приближения относительно $\Psi^*(I^2)$ в $H^s(I^2)$, $N \geqslant 1$, удовлетворяют неравенству*

$$e^*_N(f)_s \leqslant C\|f\|_{H^t_{\mathrm{mix}}} \begin{cases} N^{-(t-s)}, & 0 < s < 1/2,\ s < t, \\ N^{-t}(1+\log N)^t, & s = 0 < t < 1, \\ N^{-1}(1+\log N)^{3/2}, & s = 0,\ t = 1, \\ N^{-(t-s/2)}, & -1 < s < 0,\ s/d < t. \end{cases} \tag{25}$$

Доказательство. Пусть $-1 < s < 1/2$, $-1/2 < t < 1$ (граничный случай $t = 1$ будет рассмотрен позже). Для любого конечного подмножества $\Psi \subset \Psi^*(I^2)$ с набором носителей $\Lambda_\Psi = \{\Delta \in \mathscr{D}^*(I^2) : \psi_\Delta \in \Psi\}$ и для любой $f \in H^t_{\mathrm{mix}}(I^2)$, используя (17) и (16), имеем

$$\begin{aligned} e_\Psi(f)^2_s &\leqslant C \inf_{v \in V_\Psi} \|f - v\|^2_{A^s} = C \sum_{\Delta \notin \Lambda_\Psi} d(\Delta)^{-2s} |c_\Delta(f)|^2 \\ &\leqslant C \max_{\Delta \notin \Lambda_\Psi} \frac{d(\Delta)^{-2s}}{(|\Delta'|\,|\Delta''|)^{-2t}} \sum_{\Delta \notin \Lambda_\Psi} (|\Delta'|\,|\Delta''|)^{-2t} |c_\Delta(f)|^2 \\ &\leqslant C \max_{\Delta \notin \Lambda_\Psi} \frac{2^{2s\max(j_1,j_2)}}{2^{2t(j_1+j_2)}} \|f\|^2_{H^t_{\mathrm{mix}}}. \end{aligned}$$

Выбирая подходящие Ψ, получаем верхние оценки теоремы 4. Например, если Ψ совпадает с гиперболическим крестом $\Psi^*_J(I^2)$, то

$$\max_{\Delta \notin \Lambda_{\Psi^*_J(I^2)}} \frac{2^{2s\max(j_1,j_2)}}{2^{2t(j_1+j_2)}} = \max_{j_1+j_2 > J} \frac{2^{2s\max(j_1,j_2)}}{2^{2t(j_1+j_2)}} \asymp \begin{cases} 2^{-2(t-s)J}, & s \geqslant 0, \\ 2^{-2(t-s/2)J}, & s < 0. \end{cases}$$

Из этого следуют (24) и (25) при $s = 0$, так как $\#\Psi^*_J(I^2) \asymp J2^J$, $J \to \infty$.

Чтобы доказать (25) полностью, положим

$$\Psi^{s,*}_J \equiv \begin{cases} \displaystyle\bigcup_{j_1,j_2 \geqslant 0;\ j_1+j_2-\mu\max(j_1,j_2) \leqslant (1-\mu)J} \Psi_{j_1,j_2}, & s > 0, \\ \displaystyle\bigcup_{j_1,j_2 \geqslant 0;\ j_1+j_2+2\mu\max(j_1,j_2) \leqslant (1+\mu)J} \Psi_{j_1,j_2}, & s < 0, \end{cases}$$

где $\mu > 0$ выберем позже. Заметим, что для любого фиксированного $\mu > 0$, в обоих случаях $s > 0$ и $s < 0$, имеем $\#\Psi_J^{s,*} \asymp 2^J$. Пусть $t > s > 0$, из соображений симметрии получим

$$\max_{\Delta \notin \Lambda_{\Psi_J^{s,*}}} \frac{2^{2s\max(j_1,j_2)}}{2^{2t(j_1+j_2)}} = \max_{j_1 \geqslant j_2 \geqslant 0:\, j_1+j_2-\mu j_1 > (1-\mu)J} 2^{2sj_1-2t(j_1+j_2)}.$$

Легко увидеть, что при $0 < \mu < s/t$, асимптотически, максимум достигается вблизи $j_2 = 0$, $j_1 = J+1$, и по порядку $\asymp 2^{2J(s-t)}$. Так как $\#\Psi_J^{s,*} \asymp 2^J$, это влечет (25) при $0 < s < t < 1$ и $N \asymp 2^J$.

Аналогично, при $s < 0$, $s/2 < t < 1$, имеем

$$\max_{\Delta \notin \Lambda_{\Psi_J^{s,*}}} \frac{2^{2s\max(j_1,j_2)}}{2^{2t(j_1+j_2)}} = \max_{j_1 \geqslant j_2 \geqslant 0:\, j_1+j_2+2\mu j_1 > (1+\mu)J} 2^{2sj_1-2t(j_1+j_2)}.$$

Выбирав $0 < \mu < -s/(2t)$, если $t > 0$ (если $s/2 < t \leqslant 0$, то выберем любое $\mu > 0$), можно показать, что максимум $\asymp 2^{2J(s/2-t)}$ и достигается вблизи $j_1 = j_2 = [J/2]+1$. Это завершает доказательство теоремы 4 в случае $t < 1$.

Модифицируем доказательство для случая $t = 1$. Мы воспользуемся оценкой (20) вместо (16). Тогда для Ψ вида $\Psi = \bigcup_{(j_1,j_2)\in\mathcal{J}} \Phi^*_{j_1,j_2}$, где $\mathcal{J}$ – конечный набор индексов, получим

$$e_\Psi(f)_s^2 \leqslant C\Biggl(\sum_{(j_1,j_2)\notin\mathcal{J}} \frac{2^{2s\max(j_1,j_2)}}{2^{2(j_1+j_2)}}\Biggr)\|f\|^2_{H^1_{\mathrm{mix}}}.$$

Затем, вычисляя полученную сумму для определенных выше Ψ (вместо вычисления соответствующих максимумов), мы получим необходимый результат. В частности, для $s = 0$, $\Psi = \Psi_J^*(I^2)$, мы получим неравенство

$$e^*_{\#\Psi_J^*(I^2)}(f)_0 \leqslant C\Biggl(\sum_{j_1+j_2>J} 2^{-2(j_1+j_2)}\Biggr)\|f\|^2_{H^1_{\mathrm{mix}}} \leqslant CJ2^{-2J}\|f\|^2_{H^1_{\mathrm{mix}}},$$

из которого, вследствие $\#\Psi_J^*(I^2) \asymp J2^J$, получается степень $3/2$ при логарифмическом члене, при $t = 1$.

Мы приведем несколько примеров, показывающих, что оценки в теореме 4 точны по крайней мере для определенных значений параметров. Очевидно, сложности возникнут, если $s \leqslant -1/2$ и $t \geqslant 1/2$, так как для этих значений параметров использованные неравенства (16), (17) не могут быть обращены. Начнем с рассмотрения C^∞-функции $f(x_1,x_2) = (1+x_1)(1+x_2)$, $x = (x_1,x_2) \in I^2$, которая охватывает случай $t = 1$, $-1/2 < s < 1/2$. Для этой f коэффициенты Фурье–Хаара могут быть вычислены как

$$|c_\Delta(f)| = \sqrt{2}\cdot 2^{-3/2(j_1+j_2)} \qquad \forall\,\Delta \in \mathcal{D}_{j_1,j_2},\quad j_1,j_2 \geqslant 1.$$

Если заменить равенство на $\asymp$, то это соотношение выполнено и для $j_1 = 0, j_2 = 0$. Таким образом, для больших J получим

$$N_J(f) \equiv \#\{\Delta : 2^{-3J} \leqslant |c_\Delta(f)|^2 \leqslant 32^{-3J}\} \asymp J2^J.$$

Таким образом, если $s = 0$, получим при $N = [N_J(f)/2] \asymp J2^J$

$$e_N^*(f)_0^2 \geqslant N_J(f)2^{-3J-1} \geqslant cJ2^{-2J} \geqslant cN^{-2}(\log N)^3.$$

В первом неравенстве мы воспользовались (16) при $s = 0$, вместе с тем фактом, что при любом выборе N-членной аппроксимации v, все еще осталось $\geqslant N_J(f) - N \geqslant N_J(f)/2$ коэффициентов $f - v$ таких, что

$$|c_\Delta(f-v)|^2 = |c_\Delta(f)|^2 \geqslant 2^{-3J}.$$

Для случая $-1/2 < s < 0$, возьмем $N = \#\Psi_{J,J}/2 \asymp 2^{2J}$, и, применяя (16), получим:

$$e_N^*(f)_s^2 \geqslant cN2^{2Js}2^{-6J} \geqslant c2^{-4(1-s/2)J} \geqslant cN^{-2(1-s/2)}.$$

Мы воспользовались тем, что по крайней мере N коэффициентов, соответствующих $\Psi_{J,J}$, остались неизмененными при замене f на $f - v$, где v произвольный N-членный полином по системе Хаара $\Psi^*(I^2)$. Наконец, для $0 < s < 1/2$, рассмотрим последовательность $N = \#\Psi_{J,0}/2 \asymp 2^J$. Затем, с помощью аналогичных рассуждений, получим

$$e_N^*(f)_s^2 \geqslant cN2^{2Js}2^{-3J} \geqslant c2^{-2(1-s)J} \geqslant cN^{-2(1-s)}.$$

Таким образом, пример $f(x) = (1 + x_1)(1 + x_2)$ показывает, что оценка (25) верно отражает асимптотическое поведение N-членных приближений функций из $H^1_{\mathrm{mix}}(I^2)$ в H^s-нормах при $-1/2 < s < 1/2$. Чтобы оценить асимптотическое поведение N-членных приближений в H^s-норме на классе X, определим величины

$$e_N^*(X)_s = \sup_{f\in X:\, \|f\|_X \leqslant 1} e_N^*(f)_s.$$

Предложение 5. *Выполнены следующие оценки*

$$e_N^*(H^1_{\mathrm{mix}})_s \asymp \begin{cases} N^{-(1-s)}, & 0 < s < 1/2, \\ N^{-1}(\log N)^{3/2}, & s = 0, \\ N^{-(1-s/2)}, & -1/2 < s < 0, \end{cases} \qquad N \to \infty. \tag{26}$$

Также, благодаря тому факту, что контрпример для нижних оценок принадлежит $C^\infty(I^2)$, получен точный порядок насыщения N-членной аппроксимации относительно системы Хаара $\Psi^*(I^2)$. Случай $-1 < s \leqslant -1/2$ остается открытым.

Для другого случая $1/2 < s \leqslant \max(s, s/2) < t < 1/2$ легко дать следующий контрпример:

$$f = f_J^s \equiv \begin{cases} v_{J,0}, & 0 < s < 1/2, \\ \sum\limits_{j=0}^{J} v_{J-j,j}, & s = 0, \\ v_{J,J}, & -1/2 < s < 0, \end{cases} \qquad v_{j_1,j_2} \equiv \sum_{\Delta \in \mathscr{D}_{j_1,j_2}} \psi_\Delta.$$

Пользуясь (17), (16), получим

$$\|f_J^s\|^2_{H^t_{\mathrm{mix}}} \asymp \begin{cases} 2^{J(1+2t)}, & 0 < t < 1/2, \\ J2^{J(1+2t)}, & t = 0, \\ 2^{2J(1+2t)}, & -1/2 < t < 0, \end{cases}$$

для любого $-1/2 < t < 1/2$. Оценивая, как раньше, с $N = [N_J^s/2]$, где

$$N_J^s \equiv \begin{cases} \#\Psi_{J,0} \asymp 2^J, & 0 < s < 1/2, \\ \#\Psi_{J,0} + \cdots + \#\Psi_{0,J} \asymp J2^J, & s = 0, \\ \#\Psi_{J,J} \asymp 2^{2J}, & -1/2 < s < 0, \end{cases}$$

получим

$$e_N^*(f_J^s)_s^2 \asymp \begin{cases} 2^{J(1+2s)} \asymp N^{-2(t-s)}\|f_J^s\|^2_{H^t_{\mathrm{mix}}}, & 0 < s < 1/2, \\ J2^J \asymp N^{-2t}(\log N)^{2t}\|f_J^s\|^2_{H^t_{\mathrm{mix}}}, & s = 0, \\ 2^{2J(1+s)} \asymp N^{-(t-s/2)}\|f_J^s\|^2_{H^t_{\mathrm{mix}}}, & -1/2 < s < 0, \end{cases} \qquad N = [N_J^s/2].$$

Компонуя полученные оценки, получим

Предложение 6. *Выполнены следующие оценки*:

$$e_N^*(H^t_{\mathrm{mix}})_s \asymp \begin{cases} N^{-(t-s)}, & 0 < s < t < 1/2, \\ N^{-t}(\log N)^t, & s = 0 < t < 1/2, \\ N^{-(t-s/2)}, & -1/2 < s < s/2 < t < 1/2, \end{cases} \qquad N \to \infty. \tag{27}$$

Автор верит, что предложение 6 может быть обобщено на случай $1/2 \leqslant t < 1$, который заполнил бы промежуток между оценками (27), выполненными для $t < 1/2$, и оценками (26) из предложения 5, которые соответствуют $t = 1$.

Следующий результат посвящен порядкам наилучшего N-членного приближения сингулярных функций в H^s-нормах относительно системы Хаара $\Psi^*(I^2)$. Оказывается, что несмотря на сингулярность, эти функции могут быть приближены с высокой точностью, т.е. как очень гладкие f (ср. теорема 4 b) и (26) для $t = 1$). Таким образом, этот класс сингулярных функций является примером класса, для которого наилучшая N-членная аппроксимация оправдана. С этого места $m = 1$. Чтобы не вдаваться в технические детали, мы рассмотрим только функции с сингулярностью на краю типа $(1; \alpha, \alpha)$ с $0 \leqslant \alpha < 1$. Аналогичное утверждение может быть доказано для функций с сингулярностью в вершине (22).

Теорема 7. *Пусть f функция с сингулярностью на краю типа $(1; \alpha, \alpha)$ относительно $(0,0)$, см. (21). Пусть $-1 < s < 1/2$ фиксировано. Тогда $f \in H^s(I^2)$, если $0 \leqslant \alpha < \min(1/2 - s, 1/2 - s/2)$, и*

$$e_N^*(f)_s \leqslant C_{\alpha,s} \begin{cases} N^{-(1-s)}, & 0 < s < 1/2, \\ N^{-1}(\log N)^{3/2}, & s = 0, \\ N^{-(1-s/2)}, & -1 < s < 0, \end{cases} \qquad N \to \infty. \tag{28}$$

Доказательство. *Шаг* 1. Так как $\alpha < 1$, имеем $f \in L_1(I^2)$ (см. (21) для $k = l = 0$). Следовательно, коэффициенты Фурье–Хаара $c_\Delta(f)$ определены, и тривиальным образом оцениваются как

$$|c_\Delta(f)| \leqslant C\, 2^{-(j_1+j_2)(1/2-\alpha)}(i_1 i_2)^{-\alpha}, \tag{29}$$

где

$$\Delta \equiv \left[(i_1 - 1)2^{-(j_1-1)}, i_1 2^{-(j_1-1)}\right] \times \left[(i_2 - 1)2^{-(j_2-1)}, i_2 2^{-(j_2-1)}\right] \in \mathcal{D}_{j_1,j_2}$$

для $i_l = 1, \ldots, 2^{j_l-1}$, $j_l \geqslant 0$, $l = 1, 2$ (если $j_l = 0$, то $i_l = 1$). Ниже, без специального упоминания, будет подразумеваться, что двоичные прямоугольники $\Delta \in \mathcal{D}^*(I^2)$ связаны с целыми числами i_l, j_l упомянутым образом. Заметим, что $(i_1 2^{-(j_1-1)}, i_2 2^{-(j_2-1)})$ является верхней правой вершиной носителя двумерной функции Хаара $\psi_\Delta \in \Psi_{j_1,j_2}$ (с очевидной модификацией для $j_1 = 0$ или $j_2 = 0$). Ниже множество пар индексов (i_1, i_2), соответствующее $\mathcal{D}_{j_1,j_2}$, будет обозначаться $\operatorname{supp} \mathcal{D}_{j_1,j_2}$. Рис. 1 иллюстрирует это обозначение.

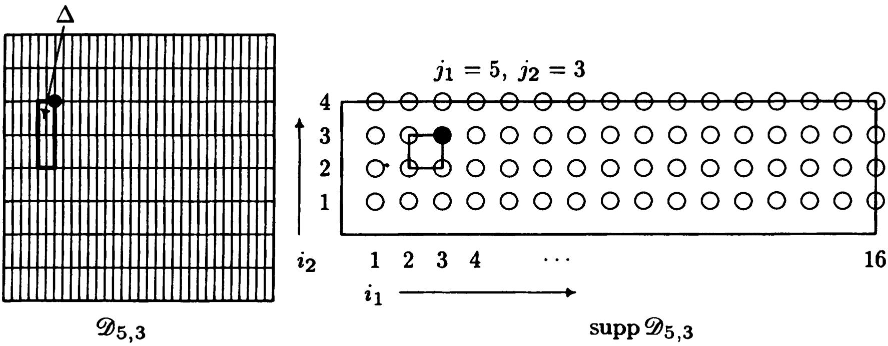

Рис. 1. Обозначения: $\mathscr{D}_{j_1,j_2}$ и $\operatorname{supp}\mathscr{D}_{j_1,j_2}$

Если $i_1 > 1$ или $i_2 > 1$, можно получить более точную оценку, чем (29). Например, если $i_1, i_2 > 1$ (что гарантирует $j_1, j_2 > 1$), тогда, по определению функции Хаара ψ_Δ, имеем

$$\begin{aligned} |c_\Delta(f)| &\leqslant (h_1h_2)^{-1/2}\int_{\Delta'}|f(x_1,x_2) - f(x_1+h_1/2,x_2) \\ &\qquad - f(x_1,x_2+h_2/2) + f(x_1+h_1/2,x_2+h_2/2)|\,dx_1\,dx_2 \\ &\leqslant \frac{1}{16}(h_1h_2)^{3/2}\|D^{(1,1)}f\|_{L_\infty(\Delta')} \leqslant Ch_1^{1/2-\alpha}h_2^{1/2-\beta}i_1^{-\alpha-1}i_2^{-\beta-1}. \end{aligned}$$

Здесь $\Delta' = [(i_1-1)h_1, (i_1-1/2)h_1] \times [(i_2-1)h_2, (i_2-1/2)h_2]$ и $h_l = 2^{-(j_l-1)}$, $l = 1, 2$. Если $i_1 > 1$ и $i_2 = 1$, то для получения таких же оценок следует использовать разности первого порядка $|f(x_1,x_2) - f(x_1+h_1/2,x_2)|$ и ограничения на $D^{(1,0)}f$ из (21). При $i_1 = i_2 = 1$ воспользуемся (29). Мы доказали следующую лемму.

Лемма 8. *Для любой функции f с сингулярностью на краю типа $(1;\alpha,\alpha)$ относительно вершины $(0,0)$, любого двоичного прямоугольника $\Delta \in \mathscr{D}^*(I^2)$, соответствующий коэффициент Фурье–Хаара $c_\Delta(f)$ оценивается следующим образом*:

$$|c_\Delta(f)| \leqslant C2^{-(1/2-\alpha)(j_1+j_2)}(i_1i_2)^{-(\alpha+1)}, \tag{30}$$

где i_l, j_l, $l = 1, 2$, – индексы, ассоциированные с Δ условленным ранее образом.

Шаг 2. Из неравенства (17) предложения 3 и его модификации (19) (далее мы будем отождествлять f и $\tilde{f}$ при $-1 < s < 0$) и определения $e_N^*(f)_s$ получим

$$e_N^*(f)_s^2 \leqslant C \inf_{\Lambda\subset\mathscr{D}^*(I^2):\#\Lambda\leqslant N}\ \sum_{\Delta\in\mathscr{D}^*(I^2)\setminus\Lambda} d(\Delta)^{-2s}|c_\Delta(f)|^2, \quad -1 < s < \frac{1}{2}. \tag{31}$$

Наша идея состоит в замене $|c_\Delta(f)|$ правой частью (30) из леммы 8 и в минимизации по Λ (см. шаг 3). Рассмотрим сперва случай $N = 0$, где нам надо оценить

H^s-норму функции f (в этом случае $\Lambda = \varnothing$, и правая часть становится просто суммой по $\mathcal{D}^*(I^2)$). Правая часть может быть разбита на две суммы, соответствующие $j_1 \geqslant j_2$ и $j_1 < j_2$. В первом случае $d(\Delta) \approx 2^{-j_1}$. Выполняя суммирование (сначала по i_1, i_2 для каждой фиксированной пары (j_1, j_2), затем по $j_1 \geqslant j_2$, и наконец, по $j_2 \geqslant 0$) мы получим конечную оценку для первой суммы, если $1 - 2(\alpha + s) > 0$ и $1 - 2\alpha - s > 0$ одновременно. Случай $j_1 < j_2$ рассматривается аналогично. Таким образом, для функций с сингулярностью на границе типа $(1; \alpha, \alpha)$ условие $0 \leqslant \alpha < \min(1/2 - s, 1/2 - s/2)$ влечет $f \in H^s(I^2)$, что доказывает первое утверждение теоремы 7.

Шаг 3. Чтобы определить подходящее Λ для оценки $e_N^*(f)_s^2$, используя (30), (31), мы применим *пороговое условие* к последовательности

$$\left\{d(\Delta)^{-s} 2^{-(1/2-\alpha)j_1} 2^{-(1/2-\beta)j_2} i_1^{-(\alpha+1)} i_2^{-(\beta+1)}\right\}.$$

Для данного $\delta > 0$ положим

$$\Lambda^\delta = \sum_{j_1, j_2 \geqslant 0} \Lambda^\delta_{j_1, j_2}, \tag{32}$$

и

$$E^\delta \equiv \sum_{j_1, j_2 \geqslant 0} \underbrace{\left(\sum_{\Delta \in \mathcal{D}_{j_1, j_2} \setminus \Lambda^\delta_{j_1, j_2}} d(\Delta)^{-2s} 2^{-(1-2\alpha)(j_1+j_2)} (i_1 i_2)^{-2(\alpha+1)} \right)}_{\equiv E^\delta_{j_1, j_2}}, \tag{33}$$

где

$$\Lambda^\delta_{j_1, j_2} = \left\{\Delta \in \mathcal{D}_{j_1, j_2} : d(\Delta)^{-s} 2^{-(1/2-\alpha)(j_1+j_2)} (i_1 i_2)^{-(\alpha+1)} \geqslant \delta\right\}, \quad j_1, j_2 \geqslant 0. \tag{34}$$

Эти обозначения позволят нам оценить сверху число $N^\delta = \#\Lambda^\delta$ различных двоичных прямоугольников в Λ^δ и H^s-погрешность E^δ в зависимости от δ. В сочетании с (31), это приведет к желаемым порядкам N-членного приближения.

На рис. 2 показано разбиение множества пар (j_1, j_2) на пять областей, в которых (34) приводит к качественно одинаковым множествам

$$\operatorname{supp} \Lambda^\delta_{j_1, j_2} = \left\{(i_1, i_2) : \Delta \in \Lambda^\delta_{j_1, j_2}\right\}.$$

На рис. 3 показаны мощности этих множеств. Буквой N помечена та часть $\operatorname{supp} \mathcal{D}_{j_1, j_2}$, которая соответствует множеству $\operatorname{supp} \Lambda^\delta_{j_1, j_2}$ и число пар в ней равно $N^\delta_{j_1, j_2} = \#\Lambda^\delta_{j_1, j_2}$, дополнение помечено буквой E (рассмотрение этих индексов приводит к оценке $E^\delta_{j_1, j_2}$). Хотя рис. 2 соответствует случаю $s = -1/2$, $\alpha = 1/2$, качественное поведение остается тем же при других значениях параметров. Масштаб рис. 2 равен $\log 1/\delta$.

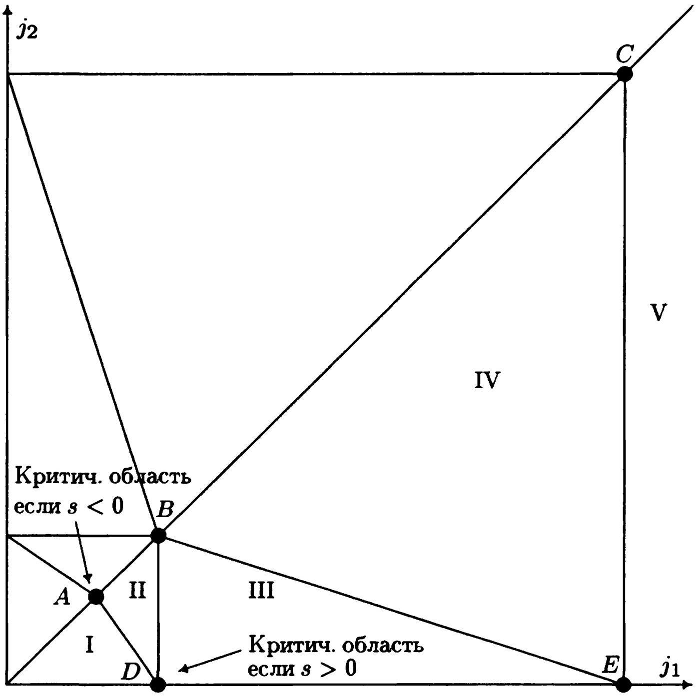

Рис. 2. Разбиение множества индексов (j_1, j_2) на области

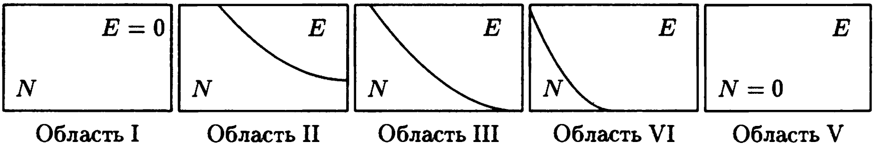

Рис. 3. Качественное строение индексных множеств $\operatorname{supp} \Lambda^{\delta}_{j_1, j_2}$

Из рисунков ясно, что оценка величин $E^{\delta}_{j_1,j_2}$ и $N^{\delta}_{j_1,j_2}$ может быть проведена одинаково для различных (j_1, j_2), принадлежащих одной области индексов. Из соображений симметрии ясно, что достаточно рассмотреть случай $j_1 \geqslant j_2$. Приведем список координат (j_1, j_2) вершин разбиения множества индексов (см. рис. 2):

$$
\begin{aligned}
&A\colon\ j_1 = j_2 \approx (3 - s)^{-1} \log_2 1/\delta,\\
&B\colon\ j_1 = j_2 \approx (2 - s - \alpha)^{-1} \log_2 1/\delta,\\
&C\colon\ j_1 = j_2 \approx (1 - s - 2\alpha)^{-1} \log_2 1/\delta,\\
&D\colon\ j_1 \approx (3/2 - s)^{-1} \log_2 1/\delta, \quad j_2 = 0,\\
&E\colon\ j_1 \approx (1/2 - s - \alpha)^{-1} \log_2 1/\delta, \quad j_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Из очевидных соображений следует ожидать, что *экстремальные значения* $E^\delta_{j_1,j_2}$ и $N^\delta_{j_1,j_2}$ достигаются вблизи этих точек. В действительности окажется, что это происходит вблизи A при $s < 0$ и D при $s > 0$. Случай L_2 $(s = 0)$ является исключительным и потребует особого рассмотрения.

Начнем с наиболее легких случаев. Рассмотрим область I. Здесь $E^\delta_{j_1,j_2} = 0$ и $N^\delta_{j_1,j_2} \approx 2^{j_1+j_2}$. Суммируя по (j_1, j_2) в области I, получим $E^\delta_{\mathrm{I}} = 0$ и

$$N^\delta_{\mathrm{I}} \approx \left\{\begin{array}{ll} N^\delta_A, & -1 < s < 0 \\ N^\delta_A \log_2 1/\delta, & s = 0 \\ N^\delta_D, & 0 < s < 1/2 \end{array}\right\} \approx \left\{\begin{array}{ll} \delta^{-2/(3-s)}, & -1 < s < 0 \\ \delta^{-2/3} \log_2 1/\delta, & s = 0 \\ \delta^{-2/(3-2s)}, & 0 < s < 1/2 \end{array}\right\}. \tag{35}$$

Аналогично, в области V имеем $N^\delta_{j_1,j_2} = 0$ и

$$E^\delta_{j_1,j_2} \leqslant C2^{2sj_1}2^{-(1-2\alpha)(j_1+j_2)} \sum_{i_1=1}^{2^{j_1-1}} \sum_{i_2=1}^{2^{j_2-1}} (i_1 i_2)^{-2(\alpha+1)} \leqslant C2^{2sj_1}2^{-(1-2\alpha)(j_1+j_2)}.$$

Выполняя суммирование, получим

$$N^\delta_{\mathrm{V}} = 0, \qquad E^\delta_{\mathrm{V}} \approx E^\delta_C \log_2 1/\delta \approx \delta^2 \log_2 1/\delta. \tag{36}$$

Последняя оценка выполнена при условии $\alpha < \min(1/2 - s, 1/2 - s/2)$ (которого достаточно для $f \in H^s(I^2)$, см. шаг 2).

Рассмотрение промежуточных областей II–IV требует большей деликатности. Мы приведем детальные выкладки для областей IV и III, и сформулируем результаты для области II (так как выкладки схожи во всех трех случаях, читатель сможет воспроизвести детали). Начнем с области IV. Напомним (см. (34)), что $(i_1, i_2) \in \operatorname{supp} \Lambda^\delta_{j_1,j_2}$ равносильно

$$1 \leqslant i_1 \leqslant i_2^{-1} \big(\delta^{-1} 2^{-j_1(1/2-(\alpha+s))} 2^{-j_2(1/2-\alpha)}\big)^{1/(1+\alpha)} \equiv \frac{\kappa}{i_2},$$

где $1 \leqslant i_2 \leqslant \kappa$. Так как мы работаем в области IV, имеем $\kappa \in [1, 2^{j_2-1}]$. Следовательно,

$$N^\delta_{j_1,j_2} = \sum_{i_2=1}^{[\kappa]} \frac{\kappa}{i_2} \leqslant C\kappa \log_2(\kappa),$$

и

$$
\begin{aligned}
E^{\delta}_{j_1,j_2} &\leqslant C2^{-2j_1(1/2-(s+\alpha))-2j_2(1/2-\alpha)} \\
&\quad\times\left(\sum_{i_2=1}^{[\kappa]}\sum_{i_1=[\frac{\kappa}{i_2}]+1}^{2^{j_1-1}}+\sum_{i_2=[\kappa]+1}^{2^{j_2-1}}\sum_{i_1=1}^{2^{j_1-1}}\right)(i_1i_2)^{-2(1+\alpha)} \\
&\leqslant C2^{-2j_1(1/2-(s+\alpha))-2j_2(1/2-\alpha)} \\
&\quad\times\left(\sum_{i_2=1}^{[\kappa]}\frac{\kappa^{-2(1+\alpha)+1}}{i_2}+\kappa^{-2(1+\alpha)+1}\right) \\
&\leqslant C\delta^2\sum_{i_2=1}^{[\kappa]}\frac{\kappa^{-2(1+\alpha)+1}}{i_2}=C\delta^2N^{\delta}_{j_1,j_2}
\end{aligned}
$$

для всех (j_1,j_2) в области IV. Аналогично неравенство

$$
E^{\delta}_{j_1,j_2}\leqslant C\delta^2N^{\delta}_{j_1,j_2} \tag{37}
$$

может быть доказано в областях II и III.

Просуммируем по (j_1,j_2) в треугольной области IV. Поскольку $1/2-(s+\alpha)>0$ по условию, просуммируем сначала по j_1 при фиксированном j_2. Получим

$$
N^{\delta}_{\mathrm{IV}}\leqslant C\sum_{(j_1,j_2)\in\overline{EB}\cup\overline{BC}}\kappa\log_2(\kappa).
$$

Так как $2^{-j_1(1/2-(s+\alpha))}\approx\delta2^{3j_2/2}$ при $(j_1,j_2)\in\overline{EB}$ (под этим мы понимаем ближайшую справа от EB целую точку), и $2^{-j_1}=2^{-j_2}$ при $(j_1,j_2)\in\overline{BC}$, имеем

$$
\kappa^{1+\alpha}=\delta^{-1}(\delta2^{3j_2/2})2^{-j_2(1/2-\alpha)}=2^{j_2(1+\alpha)}(\delta2^{j_2s})^{-(1+\alpha)/(3/2-s)}
$$

для $(j_1,j_2)\in\overline{EB}$, и

$$
\kappa^{1+\alpha}=\delta^{-1}2^{-j_2(1-s-2\alpha)},\qquad(j_1,j_2)\in\overline{BC}.
$$

По условию, $1-s-2\alpha>0$, тогда вдоль $\overline{BC}$ получим

$$
\sum_{(j_1,j_2)\in\overline{BC}}\kappa\log_2(\kappa)\leqslant C(\kappa\log_2(\kappa))\big|_B\leqslant C(j_22^{j_2})\big|_B.
$$

Аналогично,

$$
\sum_{(j_1,j_2)\in\overline{EB}}\kappa\log_2(\kappa)=\sum_{(j_1,j_2)\in\overline{EB}}j_22^{j_2}\leqslant C(j_22^{j_2})\big|_B.
$$

Но в точке B мы имеем $2^{j_2} \approx \delta^{-1/(2-(s+\alpha))}$, что приводит к

$$N_{\rm IV}^{\delta} \leqslant C\delta^{-1/(2-s-\alpha)}|\log_2 \delta|. \tag{38}$$

Оценки для E_{j_1,j_2}^{δ} следуют из (37) и (38).

Теперь рассмотрим область III. При тех же обозначениях для κ, условиями задающими $\operatorname{supp} \Lambda_{j_1,j_2}^{\delta}$ являются $1 \leqslant i_1 \leqslant \kappa/i_2$, $i_2 = 1, \dots, 2^{j_2-1}$ (по определению области III, имеем $1 \leqslant \kappa/i_2 \leqslant 2^{j_1-1}$ для всех таких i_2). Это дает

$$N_{j_1,j_2}^{\delta} = \sum_{i_2=1}^{2^{j_2-1}} \frac{\kappa}{i_2} \leqslant C\kappa j_2,$$

и, как прежде,

$$N_{\rm III}^{\delta} \leqslant C \sum_{(j_1,j_2)\in\overline{CB}} \kappa j_2.$$

Вдоль $\overline{CB}$ имеем

$$2^{-j_1(1/2-(s+\alpha))} \approx \left(\delta 2^{j_2(1/2-\alpha)}\right)^{(1/2-(s+\alpha))/(3/2-s)},$$

из чего следует

$$\kappa^{1+\alpha} \approx \left(\delta 2^{j_2(1/2-\alpha)}\right)^{(1/2-(s+\alpha))/(3/2-s)-1} = \left(\delta 2^{j_2(1/2-\alpha)}\right)^{-(1+\alpha)/(3/2-s)}$$

для $(j_1, j_2) \in \overline{CB}$. Суммирование приводит к

$$N_{\rm III}^{\delta} \leqslant C \begin{cases} \delta^{-1/(3/2-s)}, & \alpha < 1/2, \\ \delta^{-2/3}|\log_2 \delta|^2, & \alpha = 1/2, \\ \delta^{-1/(2-(s+\alpha))}, & \alpha > 1/2. \end{cases} \tag{39}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $2^{-j_2} \approx \delta^{-1/(2-(s+\alpha))}$ в точке B. Случай $\alpha \geqslant 1/2$ возможен только при $-1 < s < 0$.

Наконец, в области II множества $\operatorname{supp} \Lambda_{j_1,j_2}^{\delta}$ задаются условиями $1 \leqslant i_1 \leqslant 2^{j_1-1}$ при $1 \leqslant i_2 \leqslant i_2^*$ и $1 \leqslant i_1 \leqslant \kappa/i_2$ при $j_2^* < i_2 \leqslant 2^{j_2-1}$, где $i_2^* \approx \kappa 2^{-j_1}$. Получим следующие неравенства:

$$N_{j_1,j_2}^{\delta} \leqslant C\left(\kappa + \sum_{i_2=i_2^*+1}^{2^{j_2-1}} \kappa/i_2\right) \leqslant C\kappa\left(1 + \log_2(2^{j_2+j_1}/\kappa)\right).$$

$$E_{j_1,j_2}^{\delta} \leqslant C\delta^2 \sum_{i_2=i_2^*+1}^{2^{j_2-1}} \kappa/i_2 \leqslant C\delta^2\kappa\log_2(2^{j_2+j_1}/\kappa).$$

Суммируя по (j_1, j_2) из области II, получим

$$N_{\mathrm{II}}^{\delta} \leqslant C \sum_{(j_1,j_2)\in\overline{DA}\cup\overline{AB}} \kappa\big(1+\log_2(2^{j_2+j_1}/\kappa)\big).$$

Так как $2^{-j_1} \approx (\delta 2^{3j_2/2})^{1/(3/2-s)}$ вблизи DA, и $j_1 = j_2$ вблизи AB, мы имеем

$$\kappa^{1+\alpha} \approx \delta^{-1}(\delta 2^{3j_2/2})^{(1/2-(s+\alpha))/(3/2-s)} 2^{-j_2(1/2-\alpha)} = (\delta 2^{j_2 s})^{-(1+\alpha)/(3/2-s)}$$

для $(j_1, j_2) \in \overline{DA}$, и

$$\kappa^{\alpha+1} = \delta^{-1} 2^{-j_2(1-s-2\alpha)}, \qquad (j_1, j_2) \in \overline{AB}.$$

Как и в оценках для области IV, из последнего равенства следует, что суммирование по $\overline{DA}$ доминирует. Рассмотрев случаи $s > 0$, $s = 0$, и $s < 0$, получим

$$N_{\mathrm{II}}^{\delta} \leqslant C \begin{cases} \delta^{-1/(3/2-s)}, & s > 0, \\ \delta^{-2/3}|\log_2 \delta|, & s = 0, \\ \delta^{-2/(3-s)}, & s < 0. \end{cases} \tag{40}$$

Оценивая E_{II}^{δ}, получим те же верхние границы умноженные на δ^2:

$$E_{\mathrm{II}}^{\delta} \leqslant C\delta^2 \begin{cases} \delta^{-1/(3/2-s)}, & s > 0, \\ \delta^{-2/3}|\log_2 \delta|, & s = 0, \\ \delta^{-2/(3-s)}, & s < 0. \end{cases} \tag{41}$$

В заключение, из (35)–(41) следует, что

$$N^{\delta} \leqslant C \begin{cases} \delta^{-1/(3/2-s)}, & s > 0, \\ \delta^{-2/3}|\log_2 \delta|, & s = 0, \\ \delta^{-2/(3-s)}, & s < 0, \end{cases} \qquad E^{\delta} \leqslant C\delta^2 \begin{cases} \delta^{-1/(3/2-s)}, & s > 0, \\ \delta^{-2/3}|\log_2 \delta|, & s = 0, \\ \delta^{-2/(3-s)}, & s < 0. \end{cases}$$

Пользуясь (33) и определением $e_N^*(g)_s$, исключая $\delta > 0$, получим

$$\begin{aligned} e_{N^{\delta}}^*(g)_s \leqslant (E^{\delta})^{1/2} \leqslant (E_{\mathrm{II}}^{\delta})^{1/2} &\leqslant C \begin{cases} \delta^{1-1/(3-2s)}, & 0 < s < 1/2, \\ \delta^{2/3}|\log_2 \delta|^{1/2}, & s = 0, \\ \delta^{1-1/(3-s)}, & -1 < s < 0, \end{cases} \\ &\leqslant C \begin{cases} (N^{\delta})^{-(1-s)}, & 0 < s < 1/2, \\ (N^{\delta})^{-1}(\log N^{\delta})^{3/2}, & s = 0, \\ (N^{\delta})^{-(1-s/2)}, & -1 < s < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Наконец, для данного N, можно выбрать δ таким, что $N^{\delta} \approx N$, тем самым оценка (28) установлена. Теорема 7 доказана.

Применим теорему в частном случае $s = -1/2$ к решениям уравнения (4), для которых существует разложение (23). Так как $f^{\rm sing}$ представляется в виде линейной комбинации функций с сингулярностями на краю типа $(1; 1-\gamma, 1-\gamma)$, и $1 - \gamma = 0.7034\ldots < 3/4 = \min(1/2 - s, 1/2 - s/2)$, применяя теорему 7, получим

$$e_N^*(f^{\rm sing})_{-1/2} \leqslant CN^{-5/4}, \qquad N \to \infty.$$

Для регулярной части $f^{\rm reg} \in H^1_{\rm mix}(I^2)$ применима теорема 4:

$$e_N^*(f^{\rm reg})_{-1/2} \leqslant CN^{-5/4}, \qquad N \to \infty.$$

Следовательно, поскольку $e_{m+n}^*(f_1 + f_2)_s \leqslant e_m^*(f_1)_s + e_n^*(f_2)_s$, получим

$$e_N^*(f)_{-1/2} \leqslant CN^{-5/4}, \qquad N \to \infty, \tag{42}$$

для функций f, удовлетворяющих (23). Как упоминалось в §3, это разложение (а значит и оценка (42)) имеет место, если правая часть g в (4) достаточно гладкая (например, $g \in H^3(I^2)$). В частности, оценка выполнена для решения задачи емкости, где $g(x) \equiv 1$. Доказательство теоремы также позволяет найти подмножества $\Psi \subset \Psi^*(I^2)$, на которых достигается порядок в (42). Это важно для численных приложений и требует аккуратной проверки на практике.

В более общем случае, теоремы 4 и 7 имеют следствие, которое представляет собой практический интерес не только для $s = -1/2$, но и для $s = 0$.

Следствие 9. *Пусть $-1 < s < 1/2$, и функция f разлагается в виде $f = f^{\rm reg} + f^{\rm sing} \in H^s(I^2)$, где $f^{\rm reg} \in H^1_{\rm mix}(I^2)$, а $f^{\rm sing}$ есть линейная комбинация функций с сингулярностью на краю типа $(1; \alpha, \alpha)$ относительно вершин I^2, и $0 \leqslant \alpha < \min(1/2 - s, 1/2 - s/2)$. Тогда*

$$e_N^*(f)_s \leqslant C \begin{cases} N^{-(1-s)}, & 0 < s < 1/2, \\ N^{-1}(\log N)^{3/2}, & s = 0, \\ N^{-(1-s/2)}, & -1 < s < 0, \end{cases} \qquad N \to \infty. \tag{43}$$

В заключение сделаем некоторые замечания.

1) Порядки аппроксимаций, полученные в теореме 7, следует сравнить с порядками наилучших N-членных приближений по системе $\Psi(I^2)$, определенной в (1). Эта система Хаара является прототипом *систем всплесков*. Оценки для наилучших N-членных приближений по таким системам известны из хорошо развитой теории и раскрывают потенциал *адаптивных всплесковых методов* для эллиптических операторных уравнений (см. [2], [3]). Приведем простой пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x_1^{-\alpha}\hat{f}(x_2)$, $(x_1, x_2) \in I^2$, где $0 < \alpha < 1$ и $\hat{f} \in C^1(I)$. Чтобы увидеть, что оценки точны снизу, можно положить например $\hat{f}(x_2) = 1 + x_2$. Очевидно, такая f является функцией с сингулярностью на краю типа $(1; \alpha, \alpha)$.

Используя те же приемы, что в доказательстве леммы 8, можно оценить коэффициенты Фурье–Хаара функции f относительно подсистемы $\Psi_j(I^2)$ следующим образом

$$|c_\Delta(f)| \leqslant C2^{-j(1-\alpha)}i^{-(1+\alpha)}, \qquad \Delta \in \mathcal{D}_{j,j}, \quad j \geqslant 1.$$

Здесь $c_\Delta(f)$ обозначает коэффициент $c_\psi(f)$ для каждой из трех функций ψ из $\Psi_j(I^2)$ с носителем двоичным квадратом $\Delta = \Delta' \times \Delta''$ $(\Delta', \Delta'' \in \mathcal{D}_{j-1})$, где $\Delta' = [(i-1)2^{j-1}, i2^{j-1}]$ определяет i. Оценка точна для функций ψ из $\Psi_j \otimes \Phi_{j-1}$.

Используя те же идеи, что и в § 2, можно доказать неравенство аналогичное (19)

$$\|f\|^2_{H^s} \leqslant C\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\psi \in \Psi_j(I^2)} 2^{2js}|c_\psi(f)|^2, \qquad -1 < s < 1/2.$$

Эта оценка верна для всех $f \in L_1(I^2)$, у которых конечна правая часть. Это позволяет нам применить аналогичную пороговую процедуру, чтобы получить верхние оценки для $e_N(f)_s$. Не вдаваясь в детали, мы сформулируем результат для следующих параметров, если $\max(0, -s/2) < \alpha < \min(1/2-s/2, 1/2-s)$, $-1 < s < 1/2$, тогда

$$e_N(f)_s \leqslant C_f N^{-(1/2-(\alpha+s))}, \qquad N \to \infty. \tag{44}$$

Эта оценка точна по крайней мере для $-1/2 < s < 1/2$. Сравнение (44) и (43) показывает, что для функций с *сильной сингулярностью на краю* наилучшие N-членные аппроксимации относительно $\Psi^*(I^2)$ ведут себя лучше, чем наилучшие N-членные аппроксимации относительно $\Psi(I^2)$. Например, для параметров $s = -1/2$, $\alpha = 1/2$, которые возникают при решении (4) для сингулярной части f^{sing}, см. § 3, имеем, что $e_N(f)_{-1/2} = O(N^{-1/2})$, а из (42) следует, что $e^*_N(f)_{-1/2} = O(N^{-5/4})$.

2) Обобщение этих результатов для систем сплайнов произвольного порядка m и аналогичных систем всплесков на I^d, $d \geqslant 2$, является технической задачей. Легко провести доказательство для систем, полученных с помощью тензорного произведения из одномерных *биортогональных всплесков*. Чтобы получить оценки для соответствующих коэффициентов

$$c_\Delta(f) = (f, \tilde{\psi}_\Delta)_{L_2},$$

надо воспользоваться локальностью носителей и нулевыми моментами у функций биортогональной системы $\{\tilde{\psi}_\Delta\}$, вместо специфических свойств системы Хаара. Области возможных параметров (s, t) и s, для которых аналоги теорем 4 и 7 имеют место, будут зависеть от регулярности и порядка фильтрационного полинома в соответствующей многослойной схеме (см. [2] для более полного обзора этих вопросов). Для рассмотрения полуортогональных всплесковых систем сплайнов (как в [9] для $m = 2$), необходимо использовать более тонкие технические приемы, так как носители функций из $\tilde{\psi}_\Delta$ не локальны.

3) Отметим некоторые открытые проблемы. Например, открытой осталась проблема нетривиального описания *классов функций, охарактеризованных определенным порядком наилучшего N-членного приближения* относительно таких систем, как $\Psi^*(I^2)$, и распространение полученных результатов на L_p $(p \neq 2)$.

Список литературы

[1] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
[2] Dahmen W. Wavelet and multiscale methods for operator equations // Acta Numerica. 1997. V. 6. P. 55–228.
[3] DeVore R. A. Nonlinear approximation // Acta Numerica. 1998. V. 7. P. 51–150.
[4] DeVore R. A., Lorentz G. G. Constructive Approximation. New York: Springer-Verlag, 1993.
[5] DeVore R. A., Konyagin S. V., Temlyakov V. N. Hyperbolic wavelet approximation // Constr. Approx. 1998. V. 14. P. 1–26.
[6] Temlyakov V. N. The best m-term approximation and greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 1998. V. 8. №3. P. 249–265; DeVore R. A., Temlyakov V. N. Some remarks on greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 1996. V. 5. №2–3. P. 173–187.
[7] Голубов Б. И. Ряды по системе Хаара // Итоги науки и техники. Матем. анализ. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 109–146.
[8] Griebel M., Knapek S. Optimized approximation spaces for operator equations // Preprint SFB 256: Universität Bonn, 1998.
[9] Griebel M., Oswald P., Schiekofer T. Sparse grids for boundary integral equations // Numer. Math. (to appear).
[10] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
[11] Lions J.-L., Magenes E. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. V. 1. Berlin: Springer-Verlag, 1972.
[12] Oswald P. Multilevel Finite Element Approximation: Theory and Applications. Stuttgart: Teubner, 1994.
[13] Oswald P. Multilevel norms for $H^{-1/2}$ // Computing. 1998. V. 61. P. 235–255.
[14] von Petersdorff T., Stephan E. P. Decomposition in edge and corner singularities for the solution of the Dirichlet problem of the Laplacian in a polyhedron // Math. Nachr. 1990. V. 149. P. 71–104.
[15] von Petersdorff T., Stephan E. P. Regularity of mixed boundary value problems in $\mathbb{R}^3$ and boundary element methods on graded meshes // Math. Meth. Appl. Sci. 1990. V. 12. P. 229–249.
[16] Stephan E. P. The h-p boundary element method for solving 2- and 3-dimensional problems // Preprint. Univ. Hannover, 1995.
[17] Temlyakov V. N. Approximation of Periodic Functions. New York: Nova Sci. Publ., 1993.
[18] Temlyakov V. N. Nonlinear m-term approximation with regard to the multivariate Haar system // East J. Approx. 1998. V. 4. P. 87–106.
[19] Трибель Г. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
[20] Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара // Матем. сб. 1964. Т. 63 (105). С. 356–391.
[21] Weidmann J. Linear Operators in Hilbert Spaces. New York: Springer-Verlag, 1980.
[22] Zenger C. Sparse grids, in Parallel Algorithms for Partial Differential Equations // Proc. 6th GAMM Seminar, Kiel / Ed. W. Hackbusch. Braunschweig: Vieweg, 1991. P. 241–251.

Bell Labs, Lucent Technologies,
Murray Hill, NJ, USA
E-mail: `poswald@research.bell-labs.com`

Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. С. 165–195

Линейные и нелинейные методы рельефной аппроксимации

К. И. Осколков

Наша цель – сравнение эффективностей *свободной* (*нелинейной*) *рельефной*, *равнораспределенной рельефной* и *полиномиальной* аппроксимации $\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f]$, $\mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f]$, $\mathscr{E}_N[f]$ индивидуальной функции $f(\mathbf{x})$ в метрике $\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$, где $\mathbb{B}^2$ – единичный круг $|\mathbf{x}| \leqslant 1$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. По определению,

$$\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f] := \inf_{R\in \mathscr{W}_N^{\mathrm{fr}}} \|f - R\|, \quad \mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f] := \min_{R\in \mathscr{W}_N^{\mathrm{eq}}} \|f - R\|,$$
$$\mathscr{E}_N[f] := \min_{P\in \mathscr{P}_{N-1}^2} \|f - P\|.$$

Здесь $\mathscr{W}_N^{\mathrm{fr}}$ множество всех N-членных линейных комбинаций функций типа плоская волна $R(\mathbf{x}) = \sum_1^N W_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j)$ с произвольными профилями $W_j(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$ и направлениями распространения $\{\boldsymbol{\theta}_j\}_1^N$; $\mathscr{W}_N^{\mathrm{eq}}$ – подмножество $\mathscr{W}_N^{\mathrm{fr}}$, соответствующее N равнораспределенным направлениям, а $\mathscr{P}_{N-1}^2 := \mathrm{Span}\{x_1^k x_2^l\}_{k+l<N}$ – подпространство алгебраических многочленов двух действительных переменных степени $\leqslant N-1$. Выполнены неравенства $\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f] \leqslant \mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f] \leqslant \mathscr{E}_N[f]$.

Модельная задача: для каких функций выполнено соотношение $\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f] = o(\mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f])$, $N \to \infty$, т.е. когда нелинейная аппроксимация $\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}$ более эффективна, чем линейная $\mathscr{R}^{\mathrm{eq}}$? Доказано, что этот эффект имеет место для гармонических функций: $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, c_\varepsilon > 0$ такая, что если $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$, $|\mathbf{x}| < 1$, $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$, то

$$\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f] \leqslant c_\varepsilon\big(\mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f]\exp(-N^\varepsilon) + \mathscr{R}_{N^{2-3\varepsilon}}^{\mathrm{eq}}[f]\big).$$

С другой стороны, $\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f] \geqslant \frac{1}{c}\mathscr{R}_{N^2}^{\mathrm{eq}}[f]$. Итак, для $f = f_{\mathrm{harm}}$, $\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f]$ “почти в квадрат раз лучше” чем $\mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f]$. Однако эти ультра-высокие порядки приближения достигаются за счет *коллапса* волновых векторов.

Напротив, нелинейность $\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}$ (связанная со свободой выбора волновых векторов) не приносит существенного выигрыша в порядках приближения, например, для всех радиальных функций. Если $f(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|)$, то $\mathscr{E}_{2N}[f] \geqslant \mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f] \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}}\mathscr{E}_{2N}(f)$ и $\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f] \geqslant \sup_{\varepsilon>0}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3(1+\varepsilon)}}\,\mathscr{R}_{(1+\varepsilon)N}^{\mathrm{eq}}[f]$.

Основной аппарат – анализ Фурье–Чебышёва, связанный с обратным преобразованием Радона в $\mathbb{B}^2$, и возникающая *двойственность* проблем рельефной аппроксимации и оптимизации *квадратурных формул*, в смысле Колмогорова–Никольского [1], на классах тригонометрических полиномов.

Библиография: 23 названия.

1. Введение

Здесь мы рассматриваем специальный случай общей проблемы рельефной аппроксимации. Прежде всего, мы ограничимся случаем (комплекснозначных) функции двух действительных переменных $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$ в единичном круге $\mathbb{B}^2 := \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant 1\}$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Далее, предполагается что $f(\mathbf{x}) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$; аппроксимационная задача рассматривается только в норме пространства Гильберта $\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$,

$$\|f(\mathbf{x}), \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)\| := \left(\iint_{\mathbb{B}^2} |f(\mathbf{x})|^2 \, \mu(d\mathbf{x})\right)^{1/2},$$

где $\mu(d\mathbf{x}) := \dfrac{dx_1\, dx_2}{\pi}$ обозначает нормированную меру Лебега в $\mathbb{B}^2$.

Введем некоторые нужные обозначения. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ будет обозначать обычное скалярное произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$; $\mathscr{S}^1$ – единичная окружность $|\mathbf{x}| = 1$; $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\vartheta) := \langle \cos\vartheta, \sin\vartheta \rangle$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$ – полярная параметризация $\mathscr{S}^1$. Далее, для $N = 1, 2, \ldots$, мы будем использовать векторное обозначение $\vec{\vartheta} := \{\vartheta_j\}_1^N \in \mathbb{R}^N$ для N-элементных множеств направляющих углов; $\boldsymbol{\theta}_j := \langle \cos\vartheta_j, \sin\vartheta_j \rangle$, $\vec{\boldsymbol{\theta}} = \vec{\boldsymbol{\theta}}(\vec{\vartheta}) := \{\boldsymbol{\theta}_j\}_1^N$.

Введем в рассмотрение множества $\mathscr{W}(\vec{\vartheta})$, $\mathscr{W}_N^{\mathrm{eq}}$, $\mathscr{W}_N^{\mathrm{fr}}$ *рельефных функций*. Они состоят из N-членных линейных комбинаций *плоских волн*:

$$\begin{aligned}
\mathscr{W}(\vec{\vartheta}) &:= \left\{ R(\mathbf{x}) = \sum_1^N W_j(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}_j) \right\}, \qquad \vec{\vartheta} \in \mathbb{R}^N; \\
\mathscr{W}_N^{\mathrm{fr}} &:= \bigcup_{\vec{\vartheta} \in \mathbb{R}^N} \mathscr{W}(\vec{\vartheta}), \\
\mathscr{W}_N^{\mathrm{eq}} &:= \left\{ R(\mathbf{x}) = \sum_1^N W_j(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}_j) : \vartheta_j = \frac{\pi j}{N},\ j = 0, \ldots, N-1 \right\}.
\end{aligned}$$

В этих определениях $W_j(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, – функции одной действительной переменной (волновые профили). Ясно, что в определении $\mathscr{W}(\vec{\vartheta})$ мы можем считать, что компоненты ϑ_j набора $\vec{\vartheta}$ принадлежат интервалу $[0, \pi)$, и что можно рассматривать лишь невырожденные $\vec{\vartheta}$, т.е. случаи, когда ϑ_j попарно несравнимы по $\mathrm{mod}\, \pi$.

Итак, $\mathscr{W}(\vec{\vartheta})$, $\mathscr{W}_N^{\mathrm{fr}}$, $\mathscr{W}_N^{\mathrm{eq}}$ состоят из N-членных линейных комбинаций плоских волн с произвольными профилями; $\mathscr{W}(\vec{\vartheta})$ соответствует некоторому фиксированному набору направляющих углов $\vec{\vartheta} \in \mathbb{R}^N$; $\mathscr{W}_N^{\mathrm{fr}}$ – самый широкий набор всех функций указанного вида, $\mathscr{W}_N^{\mathrm{eq}}$ – частный случай $\mathscr{W}_N^{\vec{\vartheta}}$, отвечающий N *равнораспределенным* волновым векторам.

Наша цель – исследовать для фиксированной функции $f(\mathbf{x}) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$ экстремальные задачи $\mathscr{R}(\vec{\vartheta})$, $\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}$, $\mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}$:

$$\mathscr{R}[f,\vec{\vartheta}] := \inf_{R\in\mathscr{W}(\vec{\vartheta})} \|f-R,\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)\|, \qquad \vec{\vartheta}\in\mathbb{R}^N;$$
$$\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f] := \inf_{R\in\mathscr{W}_N^{\mathrm{fr}}} \|f-R,\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)\|,$$
$$\mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f] := \min_{R\in\mathscr{W}_N^{\mathrm{eq}}} \|f-R,\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)\|.$$

Очевидно, $\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f] = \inf\limits_{\vec{\vartheta}\in\mathbb{R}^N} \mathscr{R}[f,\vec{\vartheta}] \leqslant \mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f]$.

Особенно интересна задача о нахождении *структурных* (геометрических, дифференциальных и т. п.) условии на данную функцию $f(\mathbf{x})$, когда свобода выбора волновых векторов $\{\boldsymbol{\theta}_j\}_1^N$ в постановке проблемы $\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}$ приносит существенный выигрыш в порядках приближений по сравнению с $\mathscr{R}^{\mathrm{eq}}$. Количественно, такое преимущество выражается порядковым соотношением $\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f] = o(\mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f])$, $N\to\infty$. Частичный ответ содержится в теореме 3 (см. также следствие 1) для двух важных геометрически простейших типов функций: радиальных и гармонических.

Фундаментальное различие задач $\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}$ и $\mathscr{R}^{\mathrm{eq}}$ состоит в *нелинейности* $\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}$. Эта нелинейность связана с полной свободой выбора $\{\boldsymbol{\theta}_j\}_1^N$; волновые векторы выбираются оптимальным образом для данной функции $f(\mathbf{x})$. Напротив, для любого фиксированного набора $\vec{\vartheta}\in\mathbb{R}^N$ задача $\mathscr{R}[f,\vec{\vartheta}]$ линейная и ее решение осуществляется ортогональной проекцией в $\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$ на подпространство $\mathscr{W}(\vec{\vartheta})$, см. также ниже (теорема 4).

Далее, *несуществование и неединственность* элементов наилучшей рельефной аппроксимации являются вполне типическими для задачи $\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}$ при $N\geqslant 2$. Это можно усмотреть из следующего.

1) Если $j\geqslant 1$, $W(x)$, $|x|\leqslant 1$, – гладкая функция одной переменной, а $f(\mathbf{x},\vartheta) := \left(\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\right)^{j-1} W(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta})$, то для каждого фиксированного набора ϑ выполнено равенство $\mathscr{R}_j^{\mathrm{fr}}[f]=0$. Это легко вытекает из интерпретации угловой производной как предела разделенных разностей.

Это простое наблюдение приводит к естественному пополнению $\mathscr{W}(\vec{\vartheta})$ и $\mathscr{W}_N^{\mathrm{fr}}$ следующими множествами *коллапсированных рельефных функций*:

$$\overline{\mathscr{W}}_N(\vec{\vartheta}) := \left\{R(\mathbf{x}) = \sum_j \left(\sum_{\nu=1}^{N_j}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)^{\nu-1} W_{j,\nu}(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta})\right)\Bigg|_{\vartheta=\vartheta_j} : \sum_j N_j = N\right\},$$

$\vec{\vartheta}=\{\vartheta_j\}$. Соответственно, экстремальная задача $\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}$ может быть расслоена следующим образом:

$$\overline{\mathscr{R}}_N[f,\vec{\vartheta}] := \inf_{R\in\overline{\mathscr{W}}_N(\vec{\vartheta})} \|f(\mathbf{x})-R(\mathbf{x})\|; \qquad \overline{\mathscr{R}}_{M,N}[f] := \inf_{\vec{\vartheta}\in\mathbb{R}^M} \overline{\mathscr{R}}_N[f,\vec{\vartheta}];$$
$$\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f] = \min_{1\leqslant M\leqslant N} \overline{\mathscr{R}}_{M,N}[f].$$

Частный случай – аппроксимация *полностью коллапсированными рельефными функциями*:

$$\mathcal{R}^{\mathrm{fr}}_N[f] \leqslant \mathcal{R}^{\mathrm{col}}_N[f,\vartheta] := \inf_{\{W_j(x)\}_{j=1}^N} \left\| f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)^{j-1} W_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}),\ \mathcal{L}^2(\mathbb{B}^2) \right\|. \quad (1)$$

Такой вид аппроксимации в известной мере представляет собой антипод равнораспределенной.

2) Обозначим, соответственно,

$$\mathcal{P}^1_N := \mathrm{Span}\{x^k\}_{k\leqslant N} \quad \text{и} \quad \mathcal{P}^2_N := \mathrm{Span}\{x_1^k x_2^l\}_{k+l\leqslant N}$$

подпространства алгебраических многочленов степени N от одной и двух переменных. Если компоненты ϑ_j вектора $\vec{\vartheta} \in \mathbb{R}^N$ попарно несравнимы по $\mathrm{mod}\,\pi$, то (см., например, [2] и теорему 1 ниже) каждый многочлен $P(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^2_{N-1}$ может быть представлен как линейная комбинация плосковолновых многочленов степени $N-1$

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N P_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j),\ \ P_j(x) \in \mathcal{P}^1_{N-1}, \quad \text{или} \quad \mathcal{P}^2_{N-1} \subset \mathcal{W}(\vec{\vartheta}), \quad \mathcal{R}[P,\vec{\vartheta}] = 0. \quad (2)$$

Итак, элемент наилучшей рельефной аппроксимации, т.е. набор плоских волн $\{W_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j)\}$, не является единственным для целого класса алгебраических многочленов. Далее, классические величины – наилучшие алгебраические приближения

$$\mathcal{E}_N[f] := \min_{P\in\mathcal{P}^2_{N-1}} \|f - P, \mathcal{L}^2(\mathbb{B}^2)\|$$

мажорируют рельефные аппроксимации *для любого невырожденного набора направлений* $\vec{\vartheta} \in \mathbb{R}^N$

$$\mathcal{R}[f,\vec{\vartheta}] \leqslant \mathcal{E}_N[f]. \quad (3)$$

Решение задачи рельефной аппроксимации данной функции $f(\mathbf{x})$ зависит от *чебышёвских ортогональных моментов* $a_n(f,\vartheta)$. Эти моменты порождаются анализом Фурье–Чебышёва в $\mathbb{B}^2$:

$$\begin{aligned} a_n(f,\vartheta) &:= \int_{\mathbb{B}^2} f(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mu(d\mathbf{x}),\\ u_n(x) &:= \frac{\sin{(n+1)\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad n = 0,1,\dots. \end{aligned} \quad (4)$$

С помощью этого анализа, задача $\mathcal{R}_N(f)$ расщепляется в бесконечную серию проблем типа Колмогорова–Никольского, см. [1], об *оптимальных квадратурах для восстановления линейных функционалов*

$$\mathcal{F}_n(f)[T] := \int_0^{2\pi} a_n(f,\vartheta) T(\vartheta)\,\mu(d\vartheta), \qquad n = 0,1,\dots.$$

В общем случае моменты $a_n(f,\vartheta)$ – это тригонометрические полиномы n-го порядка, удовлетворяющие условиям типа четности $a_n(f,\vartheta+\pi)\equiv(-1)^n a_n(f,\vartheta)$. Для данного n обозначим $\mathscr{T}_n^{\pm}$ все подпространство тригонометрических полиномов, обладающих таким свойством, т.е. $\mathscr{T}_n^{\pm}:=\mathrm{Span}\{e^{im\vartheta}\}_{|m|\leqslant n(2)}$. Здесь и ниже мы используем обозначение $|m|\leqslant n(2)$ для набора целых чисел m со свойствами $|m|\leqslant n$ и $m\equiv n \pmod 2$. Пусть далее $\mu(d\vartheta):=\dfrac{d\vartheta}{2\pi}$ – нормированная мера Лебега на $\mathscr{S}^1$,

$$\|T,\mathscr{L}^2_{2\pi}\|:=\left(\int_0^{2\pi}|T(\vartheta)|^2\,\mu(d\vartheta)\right)^{1/2},$$

и

$$\begin{aligned}\mathbb{B}(\mathscr{T}_n^{\pm})&:=\{T\in\mathscr{T}_n^{\pm}:\|T,\mathscr{L}^2_{2\pi}\|\leqslant 1\},\\ \mathbb{B}(\mathscr{P}_n^1)&:=\{P(z)\in\mathscr{P}_n^1:\|P(e^{i\vartheta}),\mathscr{L}^2_{2\pi}\|\leqslant 1\}.\end{aligned}$$

Квадратурная формула $\sigma(\vec{\vartheta},\vec{w})[T]$ с *узлами* $\vec{\vartheta}:=\{\vartheta_j\}_1^N\in\mathbb{R}^N$ и *весами* $\vec{w}:=\{w_j\}_1^N\in C^N$ – это точечный функционал

$$\sigma(\vec{\vartheta},\vec{w})[T]:=\sum_{j=1}^N w_jT(\vartheta_j).$$

Следующие величины характерны в проблеме Колмогорова–Никольского, см. [1], об оптимизации квадратур для восстановления линейных функционалов:

$$\begin{gathered}\mathscr{Q}_n[a,\vec{\vartheta}]:=\inf_{\vec{w}\in C^N}\sup_{T\in\mathbb{B}(\mathscr{T}_n^{\pm})}\left|\int_0^{2\pi}a(f,\vartheta)T(\vartheta)\,\mu(d\vartheta)-\sigma(\vec{\vartheta},\vec{w})[T]\right|,\quad \vec{\vartheta}\in\mathbb{R}^N;\\ \mathscr{Q}^{\mathrm{eq}}_{n,N}[a]:=\mathscr{Q}_n[a,\vec{\vartheta}],\quad \vartheta_j=\frac{\pi j}{N};\qquad \mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[a]:=\inf_{\vec{\vartheta}\in\mathbb{R}^N}\mathscr{Q}_n[a,\vec{\vartheta}].\end{gathered}\tag{5}$$

Здесь $a=a(\vartheta)$ – фиксированный тригонометрический полином из $\mathscr{T}_n^{\pm}$.

Теорема 1. *Пусть* $f(\mathrm{x})\in\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$, $\vec{\vartheta}\in\mathbb{R}^N$, *где компоненты* ϑ_j *попарно несравнимы по* $\mathrm{mod}\,\pi$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\mathscr{R}[f,\vec{\vartheta}]&=\sqrt{\sum_{n=N}^{\infty}(n+1)\big(\mathscr{Q}_n[a_n(f),\vec{\vartheta}]\big)^2},\\ \mathscr{R}^{\mathrm{fr}}_N[f]&=\inf_{\vec{\vartheta}\in\mathbb{R}^N}\sqrt{\sum_{n=N}^{\infty}(n+1)\big(\mathscr{Q}_n[a_n(f),\vec{\vartheta}]\big)^2}.\end{aligned}\tag{6}$$

В частности,

$$\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}_N[f] \geqslant \sqrt{\sum_{n=N}^{\infty} (n+1)\big(\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[a_n(f)]\big)^2} \tag{7}$$

и

$$\mathscr{P}^2_{N-1} \subset \mathscr{W}^{\vec{\vartheta}}_N, \qquad \mathscr{R}[f,\vec{\vartheta}] \leqslant \mathscr{E}_N[f]. \tag{8}$$

Как и при свободной рельефной аппроксимации, в проблеме Колмогорова–Никольского $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[a]$ допустимы и *коллапсированные* квадратуры, состоящие из линейных комбинаций точечных значений линейных дифференциальных операторов *тотального* порядка $\leqslant N-1$. Частный случай – это *полностью коллапсированные* квадратуры $\sigma^{\mathrm{col}}(P,\vartheta)[T] := P\left(\dfrac{d}{d\vartheta}\right)T(\vartheta)$, $P \in \mathscr{P}^1_{N-1}$. Соответствующий вариант величин $\mathscr{Q}_n[a,\vec{\vartheta}]$ отвечающий этому типу квадратур – это

$$\mathscr{Q}^{\mathrm{col}}_{n,N}[a,\vartheta] := \inf_{P\in \mathscr{P}^1_{N-1}} \ \sup_{T\in\mathbb{B}(\mathscr{T}^{\pm}_n)} \left| \int_0^{2\pi} a(f,\varphi)T(\varphi)\,\mu(d\varphi) - \sigma^{\mathrm{col}}(P,\vartheta)[T] \right|.$$

Согласно (6), свободная рельефная аппроксимация может быть оценена сверху следующим образом:

$$\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}_N[f] \leqslant \mathscr{R}^{\mathrm{col}}_N[f] = \inf_{\vartheta} \sqrt{\sum_{n=N}^{\infty} (n+1)\big(\mathscr{Q}^{\mathrm{col}}_{n,N}[a_n(f),\vartheta]\big)^2}. \tag{9}$$

Чебышёвские моменты $a_n(f,\vartheta)$, см. (4), в особенности просты для радиальных и гармонических функций в круге $\mathbb{B}^2$, т.е. когда $f(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|)$ или, соответственно, $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$, $|\mathbf{x}| < 1$ (ниже мы будем в этих случаях использовать обозначения $f = f_{\mathrm{rad}}$, $f = f_{\mathrm{harm}}$). Для $f = f_{\mathrm{rad}}$, n-й момент – это константа, $a_n(f,\vartheta) = \alpha_n$, причем $\alpha_n = 0$ для нечетных n. А для $f = f_{\mathrm{harm}}$, n-й момент представлен "мономом" наивысшей частоты в подпространстве $\mathscr{T}^{\pm}_n$, т.е. $a_n(f,\vartheta) = \beta_n e^{in\vartheta} + \gamma_n e^{-in\vartheta}$ (см. ниже, лемма 1).

Из теоремы 1 делается ясным, какие специальные случаи сформулированной выше общей проблемы Колмогорова–Никольского должны быть решены. В случае $f = f_{\mathrm{rad}}$, следует найти $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[1]$, т.е. оптимально восстановить средние значения на периоде $\int_0^{2\pi} T(\vartheta)\,\mu(d\vartheta)$ для полиномов $T \in \mathscr{T}^{\pm}_n$ (задача нетривиальна лишь для четных n, $n \geqslant N$). А в случае $f = f_{\mathrm{harm}}$, нам нужно восстановить $\int_0^{2\pi} T(\vartheta)(\beta e^{in\vartheta} + \gamma e^{-in\vartheta})\,\mu(d\vartheta)$, т.е. линейные комбинации старших коэффициентов Фурье $\hat{T}(\pm n) := \int_0^{2\pi} T(\vartheta) e^{\pm in\vartheta}\,\mu(d\vartheta)$.

С первого взгляда, проблемы относительно $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[1]$ и $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[e^{\pm in\vartheta}]$ могут показаться вполне аналогичными просто потому, что все коэффициенты полиномов из единичного шара $\mathbb{B}(\mathscr{T}^{\pm}_n)$ "равноправны". Далее заметим, что задача восстановления $\widehat{T}(\pm n)$ может быть также переформулирована, см. (50) ниже, следующим образом. *Пользуясь квадратурами, требуется оптимально восстановить значения алгебраических многочленов комплексной переменной $P(z) \in \mathbb{B}(\mathscr{P}^1_n)$ в центре $z=0$ круга $|z| \leqslant 1$ по их значениям $P(z_j)$ на окружности $\mathscr{S}^1 = \{z : |z| = 1\}$:*

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[e^{\pm in\vartheta}] &= \mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[1, \mathbb{B}(\mathscr{P}^1_n)] \\ &:= \inf_{\{z_j\}_1^N \in \mathscr{S}^1,\, \{w_j\}_1^N} \ \sup_{P \in \mathbb{B}(\mathscr{P}^1_n)} \left| P(0) - \sum_{j=1}^N w_j P(z_j) \right|. \end{aligned} \tag{10}$$

Итак, правдоподобными выглядят следующие предположения:

1) оптимальные узлы $\vec{\vartheta} = \{\vartheta_j\}_1^N$ должны быть "равнораспределены";
2) в условиях существенной нехватки узлов, т.е. если отношение N/n – малое число, невозможно восстановить единой квадратурой коэффициенты Фурье всех полиномов единичного шара $\mathbb{B}(\mathscr{T}^{\pm}_n)$ с малой глобальной погрешностью: ни одна из величин $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[1]$, $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[e^{\pm in\vartheta}]$ не является малой.

Однако оказалось, что эти предположения не оправдываются в части, относящейся к $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[e^{\pm in\vartheta}]$ (см. теорему 2). *Восстановление старшего коэффициента Фурье (или значения $P(0)$ аналитического многочлена $P(z) \in \mathbb{B}(\mathscr{P}^1_n)$, см. (10)) с малой глобальной погрешностью на классе $\mathbb{B}(\mathscr{T}^{\pm}_n)$ является возможным даже если число измерений N существенно меньше чем n, причем этот эффект управляется отношением $N/\sqrt{n}$, а не N/n.*

Теорема 2. *Пусть n, N – натуральные, n четное, $n \geqslant 2N$. Тогда*

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2N}{n+1}\right)} \leqslant \mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[1] \leqslant \sqrt{2\left(1 - \frac{2N}{n+2}\right)}. \tag{11}$$

Далее, для $n \geqslant N \geqslant 5$

$$e^{-\frac{2N^2}{n}} \leqslant \mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[e^{\pm in\vartheta}] \leqslant \mathscr{Q}^{\mathrm{col}}_{n,N}[e^{\pm in\vartheta}, 0] \leqslant \min\bigl(1, \sqrt{2n}e^{-N/\sqrt{n}}\bigr). \tag{12}$$

Смысл следующей теоремы таков.

1) Решения задач $\mathscr{R}^{\mathrm{eq}}$ (равнораспределенная рельефная аппроксимация) для $f = f_{\mathrm{rad}}$ и $f = f_{\mathrm{harm}}$ качественно и количественно одинаковы, и по существу совпадают с полиномиальной $\mathscr{E}$.
2) Для $f = f_{\mathrm{rad}}$ свобода выбора волновых векторов в $\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}$, в частности, эффект коллапса, не приносят существенного улучшения порядков приближения по сравнению с $\mathscr{R}^{\mathrm{eq}}$ или $\mathscr{E}$.
3) Напротив, для $f = f_{\mathrm{harm}}$ свободная рельефная аппроксимация $\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}$ "почти в квадрат раз лучше" чем $\mathscr{R}^{\mathrm{eq}}$, и происходит это за счет эффекта коллапса волновых векторов.

Теорема 3. *Выполнены следующие соотношения:*

$$\mathscr{R}^{\mathrm{eq}}_N[f] = \sqrt{2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(\mathscr{E}_{2qN}[f])^2}{4q^2-1}}, \quad \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathscr{E}_{2N}[f] \leqslant \mathscr{R}^{\mathrm{eq}}_N[f] \leqslant \mathscr{E}_{2N}[f], \;\; f = f_{\mathrm{rad}};$$
$$\sqrt{\frac{1}{3}}\,\mathscr{E}_{N+1}[f] \leqslant \mathscr{R}^{\mathrm{eq}}_N[f] \leqslant \mathscr{E}_N[f], \quad f = f_{\mathrm{harm}}; \tag{13}$$

$$\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}_N[f] \geqslant \sup_{M\geqslant N}\sqrt{\frac{M-N}{2M}}\,\mathscr{E}_{2M}[f] \geqslant \sup_{M\geqslant N}\sqrt{\frac{M-N}{2M}}\,\mathscr{R}^{\mathrm{eq}}_M[f], \;\; f = f_{\mathrm{rad}}; \tag{14}$$

$$e^{-8}\mathscr{E}_{N^2}[f] \leqslant \mathscr{R}^{\mathrm{fr}}_N[f] \leqslant \mathscr{R}^{\mathrm{col}}_N[f] \leqslant \min_{M\geqslant N}\big(\sqrt{2M}e^{-\frac{N}{\sqrt{M}}}\mathscr{E}_N[f] + \mathscr{E}_{M+1}[f]\big),$$
$$N \geqslant 5, \qquad f = f_{\mathrm{harm}}. \tag{15}$$

Следствие 1. *Если* $f = f_{\mathrm{rad}}$, *то*

$$\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}_N[f] \geqslant \sup_{\varepsilon>0}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}}\,\mathscr{E}_{2(1+\varepsilon)N}[f] \geqslant \sup_{\varepsilon>0}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3(1+\varepsilon)}}\,\mathscr{R}^{\mathrm{eq}}_{(1+\varepsilon)N}[f].$$

Если же $f = f_{\mathrm{harm}}$, *то*

(i) $\forall\varepsilon>0\;\exists c_\varepsilon>0$: $\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}_N[f] \leqslant c_\varepsilon\big(\mathscr{R}^{\mathrm{eq}}_N[f]\exp(-N^\varepsilon) + \mathscr{R}^{\mathrm{eq}}_{N^{2-3\varepsilon}}[f]\big)$;

(ii) $\exists\delta>0$: $\mathscr{E}_{N^{2-\delta}}[f] = o(\mathscr{E}_N[f]) \implies \mathscr{R}^{\mathrm{fr}}_N[f] = o(\mathscr{R}^{\mathrm{eq}}_N[f])$;

(iii) $\exists\alpha>0$: $\mathscr{R}^{\mathrm{eq}}_N[f] = O(N^{-\alpha}) \implies \forall\varepsilon>0$: $\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}_N[f] = O(N^{-2\alpha+\varepsilon})$, $N\to\infty$.

2. Доказательства

2.1. Анализ Чебышёва–Фурье в $\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$.

Обозначим $D_n(\vartheta)$ ядро Дирихле для подпространства $\mathscr{T}^{\pm}_n$:

$$D_n(\vartheta) := \sum_{|m|\leqslant n(2)} e^{im\vartheta} = \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Очевидно,

$$T(\vartheta) = [T * D_n](\vartheta) := \int_0^{2\pi} T(\varphi)D_n(\varphi-\vartheta)\,\mu(d\vartheta), \quad T\in\mathscr{T}^{\pm}_n. \tag{16}$$

Далее, пусть как и выше $u_n(x)$ обозначает n-й многочлен Чебышёва второго рода, т.е.

$$u_n(x) = D_n(\arccos x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x|\leqslant 1.$$

Анализ Чебышёва–Фурье в $\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$ состоит в ортогональным разложении

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)}{=} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n(f, \vartheta) u_n(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}) \right) \mu(d\vartheta), \tag{17}$$

см. [2]–[4]. Для каждого фиксированного направления $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{S}^1$ соответствующий плосковолновой многочлен Чебышёва $u_n(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta})$ ортогонален в $\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$ всем многочленам степени $\leqslant n-1$:

$$\int_{\mathbb{B}^2} u_n(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}) P(\mathbf{x})\, \mu(d\mathbf{x}) = 0 \qquad \forall\, P(\mathbf{x}) \in \mathscr{P}^2_{n-1}. \tag{18}$$

Как отмечено выше, ортогональные моменты, или *коэффициенты Фурье–Чебышёва* $a_n(f, \vartheta)$, как функции переменной ϑ представляют собой тригонометрические полиномы, причем $a_n(f) \in \mathscr{T}_n^{\pm}$. *Равенство Парсеваля* выглядит так:

$$\begin{aligned} \|f, \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \|a_n(f), \mathscr{L}^2_{2\pi}\|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_0^{2\pi} |a_n(f, \vartheta)|^2 \, d\vartheta. \end{aligned} \tag{19}$$

Далее, если $\{a_n(\vartheta)\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность тригонометрических полиномов, удовлетворяющая условиям

$$a_n \in \mathscr{T}_n^{\pm}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \|a_n, \mathscr{L}^2_{2\pi}\|^2 < \infty,$$

то (*теорема Планшереля*) существует функция $f(\mathbf{x}) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$, единственная с точностью до множества точек $\mathbf{x}$ нулевой меры такая, что $a_n(f, \vartheta) \equiv a_n(\vartheta)$, $n = 0, 1, \ldots$.

Ортогональная проекция $\mathrm{Proj}_N[f](\mathbf{x})$ в $\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$ функции $f(\mathbf{x}) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$ на подпространство алгебраических многочленов степени $N-1$ совпадает с частной суммой первых N слагаемых разложения (17),

$$\mathrm{Proj}_N[f](\mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{N-1} (n+1) a_n(f, \vartheta) u_n(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}) \right) \mu(d\vartheta), \quad N = 1, 2, \ldots,$$

и, в частности,

$$\mathscr{E}_N[f] = \sqrt{\sum_{n=N}^{\infty} (n+1) \|a_n(f), \mathscr{L}^2_{2\pi}\|^2}\,. \tag{20}$$

2.2. Моменты радиальных, гармонических и плосковолновых функций.

Лемма 1. 1) *Если* $f(\mathbf{x}) = g(|\mathbf{x}|^2)$, *где* $g(x) \in \mathscr{L}^2(0,1)$ *и* $g(x) \overset{\mathscr{L}^2(0,1)}{=} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \grave{g}_\nu l_\nu(x)$ *– ряд Фурье–Лежандра функции* $g(x)$, *то*

$$a_{2\nu+1}(f) = 0; \quad a_{2\nu}(f) = \frac{\grave{g}_\nu}{\sqrt{2\nu+1}}, \qquad \nu = 0, 1, \dots . \tag{21}$$

2) *Если* $f(r\boldsymbol{\varphi}) = \widehat{f}(0) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \big(\widehat{f}(-n)e^{-in\varphi} + \widehat{f}(n)e^{in\varphi}\big)$, $0 \leqslant r < 1$, *– стандартное представление гармонической функции* $f = f_{\mathrm{harm}} \in \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$ *в полярных координатах* $\mathbf{x} = r\boldsymbol{\varphi}$, *то*

$$a_0(f) = \widehat{f}(0), \qquad a_n(f, \vartheta) = \frac{\widehat{f}(-n)e^{-in\vartheta} + \widehat{f}(n)e^{in\vartheta}}{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{22}$$

3) *Пусть* $\omega(x) := \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$, $|x| \leqslant 1$, $W(x) \in \mathscr{L}^2_\omega(-1,1)$ *и*

$$W(x) \overset{\mathscr{L}^2_\omega(-1,1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \check{W}_n u_n(x)$$

Те же равенства выполнены и для всех $m > n$. В самом деле, для каждого фиксированного $|\mathbf{x}| = r \geqslant 0$, $u_n(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}) = u_n(r\cos(\vartheta-\varphi))$ – тригонометрический полином переменной φ порядка n, так что

$$\int_0^{2\pi} u_n\big(r\cos(\vartheta-\varphi)\big)e^{\pm im\varphi}\,d\varphi = 0, \quad \text{если} \quad m > n.$$

Итак, для доказательства (22) нужно рассмотреть лишь случай $m = n$.

Обозначим $T_n(x) := \cos(n\arccos x)$, $|x| \leqslant 1$, n-й многочлен Чебышёва первого рода. Тогда $u_0(x) = T_0(x)$, $u_n(x) = 2\sum\limits_{0\leqslant m\leqslant n(2)} T_m(x)$ для $n \geqslant 1$, и $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + q(x)$, где $q(x) \in \mathscr{P}^1_{n-2}$. Поэтому $u_n(x) = 2^{n-1}x^n + q_1(x)$, $q_1(x) \in \mathscr{P}^1_{n-2}$ и для фиксированных $n \geqslant 1$, $r > 0$ и ϑ

$$u_n\big(r\cos(\vartheta-\varphi)\big) = 2^n\big(r\cos(\vartheta-\varphi)\big)^n + t(e^{i\varphi}) = 2r^n\cos n(\vartheta-\varphi) + t_1(e^{i\varphi}),$$

где $t, t_1 \in \mathscr{T}^{\pm}_{n-2}$. Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} u_n\big(r\cos(\vartheta-\varphi)\big)e^{\pm in\varphi}\,\mu(d\varphi) = r^n e^{\pm in\vartheta}$$

и

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}^2} p_n^{\pm}(\mathbf{x})u_n(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mu(d\mathbf{x}) &= 2\int_0^1 r\left(\int_0^{2\pi} r^n e^{\pm in\varphi}u_n\big(r\cos(\vartheta-\varphi)\big)\,\mu(d\varphi)\right)dr\\ &= 2e^{\pm in\vartheta}\int_0^1 r^{2n+1}\,dr,\end{aligned}$$

откуда следуют соотношения (22). Заметим также, что для $f = f_{\mathrm{harm}} \in \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$[1)]

$$\|f;\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{|\widehat{f}(n)|^2}{|n|+1}.$$

Наконец, обратимся к утверждению касательно плосковолновых функций. Для фиксированного $\mathbf{x}$, $u_n(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta})$ как функция ϑ – тригонометрический полином, $u_n(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}) \in \mathscr{T}^{\pm}_n$. Поэтому, согласно (16),

$$\int_0^{2\pi}\frac{\check{W}_n}{n+1}D_n(\vartheta-\varphi)u_n(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mu(d\vartheta) = \frac{\check{W}_n}{n+1}u_n(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\varphi}),$$

и (23) вытекает из (17).

[1)] Само по себе условие $f(\mathbf{x}) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$ еще не гарантирует существования граничных значений $f(\boldsymbol{\theta})$.

2.3. Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим теперь функцию вида $R(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} W_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$. Тогда моменты $R(\mathbf{x})$ представлены линейными комбинациями сдвижек ядер Дирихле

$$a_n(R,\vartheta) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{N} \check{W}_{j,n} D_n(\vartheta - \vartheta_j), \tag{24}$$

где через $\check{W}_{j,n}$ обозначен n-й коэффициент Фурье–Чебышёва функции $W_j(x) \in \mathscr{L}^2_\omega(-1,1)$, см. (23). Ниже мы воспользуемся векторными обозначениями:

$$\vec{\check{W}}_n := \{\check{W}_{j,n}\}_{j=1}^N \in C^N, \quad |\vec{\check{W}}_n|^2 := \sum_{j=1}^{N} |\check{W}_{j,n}|^2, \quad \vec{U}\cdot\vec{V} = \sum_{j=1}^{N} U_j V_j;$$

пусть, далее, $\mathscr{D}_n(\vec{\vartheta})$ обозначает симметрическую матрицу $\{\mathscr{D}_n(\vartheta_j - \vartheta_k)\}_{j,k=1}^N$, а $\mathscr{D}'_n(\vec{\vartheta}) := \mathscr{D}_n(\vec{\vartheta}) - D_n(0)\mathscr{I} = \mathscr{D}_n(\vec{\vartheta}) - (n+1)\mathscr{I}$, где $\mathscr{I}$ – N-я тождественная матрица; z^* – сопряженное комплексного числа z.

Лемма 2. *Пусть n – целое неотрицательное, N – натуральное, $\vec{\vartheta} = \{\vartheta_j\}_1^N \in \mathbb{R}^N$, где ϑ_j попарно несравнимы по* $\operatorname{mod}\pi$. *Пусть далее $a(\vartheta)$ фиксированный полином класса $\mathscr{T}_n^{\pm}$, $\vec{a}(\vec{\vartheta}) := \{a(\vartheta_j)\}_1^N$. Тогда*

$$1)\ \mathscr{Q}_n[a,\vec{\vartheta}] = \min_{\vec{w}\in C^N}\left\| a(\vartheta) - \sum_{j=1}^{N} w_j D_n(\vartheta-\vartheta_j),\ \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)\right\|. \tag{25}$$

2) *Пусть $\vec{w} = \{w_j\}_1^N$ обозначает вектор оптимальных весов, или, что то же самое, минимизирующий набор экстремальной задачи в правой части* (25). *Тогда $\vec{w}$ удовлетворяет следующей системе из N линейных уравнений:*

$$\sum_{j=1}^{N} w_j D_n(\vartheta_k - \vartheta_j) = a(\vartheta_k), \quad k = 1,\dots,N, \quad \textit{или} \quad \mathscr{D}_n(\vec{\vartheta})\vec{w} = \vec{a}(\vec{\vartheta}). \tag{26}$$

$$3)\ \operatorname{rank}\mathscr{D}_n(\vec{\vartheta}) = \dim\operatorname{Span}\{\mathscr{D}_n(\vartheta-\vartheta_j)\}_{j=1}^N = \min(N, n+1). \tag{27}$$

$$4)\ \mathscr{Q}_n[a,\vec{\vartheta}] = 0,\ n \leqslant N-1;\ \ \mathscr{Q}_n[a,\vec{\vartheta}] = \sqrt{\|a,\mathscr{L}^2_{2\pi}\|^2 - \vec{w}\cdot\vec{a}^*(\vec{\vartheta})},\ n \geqslant N. \tag{28}$$

$$5)\ \sup_n \|\mathscr{D}'_n(\vec{\vartheta})\|_{l^2\mapsto l^2} = C(\vec{\vartheta}) < \infty, \tag{29}$$

т.е. $l^2 \mapsto l^2$-норма матрицы $\mathscr{D}'_n(\vec{\vartheta})$ ограничена равномерно по n.

Доказательство. Прежде всего,

$$\left\| a(\vartheta) - \sum_{j=1}^{N} w_j D_n(\vartheta - \vartheta_j) \right\| = \sup_{T \in \mathbb{B}(\mathscr{T}_n^{\pm})} \left| \int_0^{2\pi} a(\vartheta) T(\vartheta)\, \mu(d\vartheta) - \sum_{j=1}^{N} w_j T(\vartheta_j) \right|.$$

Это соотношение вытекает из (16):

$$\int_0^{2\pi} a(\vartheta) T(\vartheta)\, \mu(d\vartheta) - \sum_{j=1}^{N} w_j T(\vartheta_j) = \int_0^{2\pi} \left(a(\vartheta) - \sum_{j=1}^{N} w_j D_n(\vartheta - \vartheta_j) \right) T(\vartheta)\, \mu(d\vartheta)$$

как резонансный случай неравенства Коши. Итак, (25) вытекает из определения $\mathcal{Q}_n[a, \vec{\vartheta}]$.

Далее, (26) следует из (25), так как

$$\int_0^{2\pi} D_n(\vartheta - \vartheta_j) D_n(\vartheta - \vartheta_k)\, \mu(d\vartheta) = D_n(\vartheta_j - \vartheta_k),$$
$$\int_0^{2\pi} a(\vartheta) D_n(\vartheta - \vartheta_k)\, \mu(d\vartheta) = a(\vartheta_k).$$

Система (26) совместна для *любого* полинома $a(\vartheta) \in \mathscr{T}_n^{\pm}$. Так как $\dim \mathscr{T}_n^{\pm} = n+1$, то, используя лагранжеву интерполяцию по системе узлов $\vec{\vartheta}$, мы заключаем отсюда, что

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} \mathscr{D}_n(\vec{\vartheta}) &= \dim\{\mathscr{D}_n(\vec{\vartheta})\vec{w} : \vec{w} \in C^N\} \\ &= \dim\{\vec{a}(\vec{\vartheta}) : a(\vartheta) \in \mathscr{T}_n^{\pm}\} = \min(N, n+1). \end{aligned}$$

Далее, $\dim \operatorname{Span}\{D_n(\vartheta - \vartheta_j)\}_{j=1}^{N} = \operatorname{rank} \mathscr{D}_n(\vec{\vartheta})$, так как $\mathscr{D}_n(\vec{\vartheta})$ есть матрица Грама системы $\{D_n(\vartheta - \vartheta_j)\}_{j=1}^{N}$. Это завершает доказательство (27).

Поскольку $\operatorname{Span}\{D_n(\vartheta - \vartheta_j)\}_{j=1}^{N} = \mathscr{T}_n^{\pm}$ для $n \leqslant N-1$, равенства $\mathcal{Q}_n(a, \vec{\vartheta}) = 0$, $n \leqslant N-1$, являются следствиями из (27).

Замечание. Линейная независимость системы сдвигов $\{\mathscr{D}_n(\vartheta - \vartheta_j)\}_{j=1}^{N}$ для $n \geqslant N-1$, и (27) – известные в литературе результаты, см., например, [2].

Равенство

$$(\mathcal{Q}_n[a, \vec{\vartheta}])^2 = \min_{\vec{w} \in C^N} \left\| a(\vartheta) - \sum_{j=1}^{N} w_j D_n(\vartheta - \vartheta_j),\ \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2) \right\|^2 = \|a, \mathscr{L}^2_{2\pi}\|^2 - \vec{w} \cdot \vec{a}^*(\vec{\vartheta})$$

есть следствие из (26). Наконец, элементы матрицы $\mathscr{D}'_n(\vec{\vartheta})$ ограничены сверху величиной $\max_{j \neq k} |\csc(\vartheta_j - \vartheta_k)|$, откуда и следует (29).

Теорема 1 вытекает из равенства Парсеваля (19), утверждения 3) леммы 1, (23) и определения величин $\mathscr{Q}_n[a,\vec{\vartheta}]$. В самом деле, согласно (24) n-й момент рельефной функции $R(\mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^{N} W_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j)$ – линейная комбинация сдвижек ядер Дирихле,

$$a_n(R,\vartheta) = \sum_{j=1}^{N} w_{j,n} D_n(\vartheta - \vartheta_j), \qquad w_{j,n} := \frac{\overset{\vee}{W}_{j,n}}{n+1}, \quad j = 1,\dots,N. \tag{30}$$

Поэтому выбор оптимальных волновых профилей $W_j(x)$ для данной $f(\mathbf{x}) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$ и невырожденного набора направляющих углов $\vec{\vartheta} = \{\vartheta_j\}_{j=1}^{N} \in \mathbb{R}^N$ может быть выполнено за три следующих шага.

Шаг 1. Нахождение точечных значений чебышёвских моментов:

$$a_n(f,\vartheta_j) = \int_{\mathbb{B}^2} f(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j)\,\mu(d\mathbf{x}), \qquad j = 1,\dots,N, \quad n = 0,1,\dots.$$

Шаг 2. Решение системы из N линейных уравнений для каждого фиксированного $n = 0,1,\dots$:

$$\sum_{j=1}^{N} D_n(\vartheta_j - \vartheta_k) w_{j,n} = a_n(f,\vartheta_k), \qquad k = 1,\dots,N,$$

относительно неизвестного $\vec{w}_n = \{w_{j,n}\}_{j=1}^{N}$. Заметим, что все эти системы совместны. Однако при $n \leqslant N-2$ ("низкие частоты") решение не единственно, и единственно, если $n \geqslant N-1$ ("высокие частоты").

Шаг 3. Пусть

$$W_j(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) w_{j,n} u_n(x), \qquad j = 1,\dots,N.$$

В силу неединственности на шаге 2, оптимальные волновые профили $W_j(x)$ также всегда неединственны, если только $N \geqslant 2$. Однако нетрудно видеть, что имеет место "единственность с точностью до низких частот" – в ортогональном дополнении ${}^{\perp}\mathscr{P}^2_{N-1} := \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2) \ominus \mathscr{P}^2_{N-1}$ подпространства алгебраических многочленов $\mathscr{P}^2_{N-1}$ во всем пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$. Поэтому набор оптимальных волновых профилей $\{W_j(\mathbf{x})\}_1^N = \{W_j(f,\vec{\vartheta},\mathbf{x},\vec{\vartheta})\}_1^N$, т.е. минимайзер в задаче $\mathscr{R}_N(f - \mathrm{Proj}_N[f],\vec{\vartheta})$, является единственным.

В следующем утверждении мы используем обозначение $\vec{W}(x) = \{W_j(x)\}_1^N$ для набора, состоящего из N функций одной переменной, и далее,

$$\mathscr{E}_M[\vec{W}] := \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \bigl(\mathscr{E}_M[W_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j)]\bigr)^2} = \sqrt{\sum_{n=M}^{\infty} |\overset{\vee}{\vec{W}}_n|^2}, \qquad M = 1,2,\dots.$$

Теорема 4. *Допустим, что компоненты ϑ_j вектора $\vec{\vartheta} \in \mathbb{R}^N$ попарно несравнимы по* $\operatorname{mod}\pi$, *и пусть* $R(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} W_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j)$. *Тогда*

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}_M[\vec{W}] = \left(1 + O_{\vec{\vartheta}}\Big(\frac{1}{M}\Big)\right)\mathscr{E}_M[R], \quad M \to \infty; \\ &\mathscr{E}_M[\vec{W}] \leqslant C(\vec{\vartheta})\mathscr{E}_M[R], \quad M \geqslant N-1, \end{aligned} \tag{31}$$

где постоянные в $O_{\vec{\vartheta}}$ и $C(\vec{\vartheta})$ зависят лишь от $\vec{\vartheta}$.

Далее, оператор

$$\vec{W}_N\colon\ f(\mathbf{x}) \mapsto \vec{W}_N(f) = \{W_j(f,x)\}_{j=1}^N := \arg\min\left\| f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{N} W_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j), \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)\right\|$$

является корректно определенным, линейным и ограниченным из ${}^{\perp}\mathscr{P}^2_{N-1}$ *в* $\vec{\mathscr{L}}_{\omega,N}$, *где* $\omega(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$ *и*

$$\vec{\mathscr{L}}_{\omega,N} := \left\{\vec{W}(x) = \{W_j(x)\}_{j=1}^N : \|\vec{W},\vec{\mathscr{L}}_{\omega,N}\| = \sum_{j=1}^{N}\|W_j(x),\mathscr{L}^2_\omega(-1,1)\| < \infty\right\}.$$

Доказательство. Согласно (20) и (30),

$$\begin{aligned} (\mathscr{E}_M[R])^2 &= \sum_{n=M}^{\infty}(n+1)\|a_n(R),\mathscr{L}^2_{2\pi}\|^2 = \sum_{n=M}^{\infty}\frac{\mathscr{D}_n(\vec{\vartheta})}{n+1}\vec{\check{W}}_n\cdot\vec{\check{W}}^*_n \\ &= \sum_{n=M}^{\infty}\left(|\vec{\check{W}}_n|^2 - \frac{\mathscr{D}'_n(\vec{\vartheta})}{n+1}\vec{\check{W}}_n\cdot\vec{\check{W}}^*_n\right) \\ &= (\mathscr{E}_M[\vec{W}])^2 - \sum_{n=M}^{\infty}\frac{\mathscr{D}'_n(\vec{\vartheta})}{n+1}\vec{\check{W}}_n\cdot\vec{\check{W}}^*_n, \end{aligned} \tag{32}$$

а используя (32), мы далее имеем

$$\left|\sum_{n=M}^{\infty}\frac{\mathscr{D}'_n(\vec{\vartheta})}{n+1}\vec{\check{W}}_n\cdot\vec{\check{W}}^*_n\right| \leqslant \frac{C(\vec{\vartheta})}{M+1}\sum_{n=M}^{\infty}|\vec{\check{W}}_n|^2 = \frac{C(\vec{\vartheta})}{M+1}(\mathscr{E}_M[\vec{W}])^2,$$

откуда и следует асимптотическая формула в (31). Отсюда, конечно, вытекает и оценка $\mathscr{E}_M[\vec{W}] \leqslant C(\vec{\vartheta})\mathscr{E}_M[R]$ для всех достаточно больших $M \geqslant M_0(\vec{\vartheta})$. А чтобы установить, что эта же оценка верна и для всех оставшихся M, т.е. для $N-1 \leqslant M < M_0(\vec{\vartheta})$, заметим, что согласно (27), при $n \geqslant M \geqslant N-1$ все матрицы $\mathscr{D}_n(\vec{\vartheta})$ являются *строго* положительно определенными, так что (ср. (32))

$$\sum_{M\leqslant n<M_0(\vec{\vartheta})}|\vec{\check{W}}_n|^2 \leqslant C'(\vec{\vartheta})\sum_{M\leqslant n<M_0(\vec{\vartheta})}\frac{\mathscr{D}_n(\vec{\vartheta})}{n+1}\vec{\check{W}}_n\cdot\vec{\check{W}}^*_n.$$

Доказательство утверждения 2) аналогичное, и мы опускаем детали.

Замечание. Если $R(\mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^{N} W_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j)$, то очевидно, что

$$\|R\| \leqslant \sum_{j=1}^{N} \|W_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j)\|.$$

Верно также, что если $R(\mathbf{x}) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$, то и все слагаемые $W_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j)$ также принадлежат $\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$. Однако легко видеть, что при $N \geqslant 2$ невозможно оценить нормы $W_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j)$ только в терминах суммы R. В самом деле, множество рельефных функций класса $\mathscr{W}(\vec{\vartheta})$ содержит "ядра" типа $0 \equiv \sum\limits_{j=1}^{N} P_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j)$, где $\{P_j(x)\}$ – нетривиальные наборы многочленов одной переменной степени $N-2$.

Итак, (31) – корректная форма оценок "обратного типа" для плосковолновых компонент $W_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j)$ суммы R.[2)]

2.4. Равнораспределенные квадратуры и рельефные аппроксимации. В этом разделе мы рассмотрим равнораспределенные квадратуры и докажем соотношения (13) в теореме 3 для равнораспределенных рельефных аппроксимаций f_{rad} и f_{harm}. Здесь мы будем считать, что $\vartheta_j = \dfrac{\pi j}{N}$, и наша цель – явное решение всей серии оптимизационных задач $\mathscr{Q}^{\mathrm{eq}}_{n,N}[a]$, см. также [2] и [6].

Рассмотрим *спектральную матрицу*, составленную из коэффициентов Фурье чебышёвских моментов $a_n(f,\vartheta)$ данной функции $f(\mathbf{x}) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$:

$$\widehat{\mathscr{A}}(f) := \bigl\{\{\widehat{a}_{m,n}(f)\}_{|m|\leqslant n(2)}\bigr\}_{n=0}^{\infty}, \quad a_n(f,\vartheta) = \sum_{|m|\leqslant n(2)} \widehat{a}_{m,n}(f)e^{im\vartheta}. \tag{33}$$

Для фиксированного n обозначим $\widehat{\mathbf{a}} = \widehat{\mathbf{a}}_n(f) = \langle \widehat{a}_{m,n}\rangle_{|m|\leqslant n(2)}$ n-й столбец матрицы $\widehat{\mathscr{A}}(f)$; $|\widehat{\mathbf{a}}| := \sqrt{\sum\limits_{|m|\leqslant n(2)} |\widehat{a}_{m,n}|^2} = \|a_n(f), \mathscr{L}^2_{2\pi}\|$. Оптимизация квадратуры для восстановления функционала $\int_0^{2\pi} a(\vartheta)T(\vartheta)\,d\vartheta$ по значениям в равнораспределенных узлах двойственна следующей аппроксимационной задаче для вектора $\widehat{\mathbf{a}}$:

$$\mathscr{E}^{\mathrm{dif}}_N[\widehat{\mathbf{a}}] := \min\bigl\{|\widehat{\mathbf{a}} - \mathbf{c}| : c_l = c_m,\ l \equiv m(2N),\ |l|, |m| \leqslant n(2)\bigr\};$$
$$\mathbf{c}(\widehat{\mathbf{a}}, N) := \arg \mathscr{E}^{\mathrm{dif}}_N(\widehat{\mathbf{a}}).$$

Геометрически, эта задача решается ортогональным проектированием в l^2 вектора $\widehat{\mathbf{a}}$ на подпространство векторов $\mathbf{c}$, координаты которых c_m, $|m| \leqslant n(2)$, периодичны с периодом $2N$ или, что то же самое, постоянны вдоль арифметических

[2)] Представляется интересным выяснить, выполнены ли оценки такого типа для функциональных норм, отличных от $\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$.

прогрессий mod $2N$:

$$
\begin{aligned}
c_m(\widehat{\mathbf{a}}, N) &= \frac{1}{\delta(m,n,N)} \sum_{l \equiv m(2N)} \widehat{a}_l; \\
\delta(m,n,N) &:= \left[\frac{n+m}{2N}\right] + \left[\frac{n-m}{2N}\right] + 1, \quad |m| \leqslant n(2),
\end{aligned}
\tag{34}
$$

($[x]$ обозначает целую часть $x \in \mathbb{R}^1$). Оператор $\mathbf{C}_{N,n}\colon \widehat{\mathbf{a}}_n \mapsto \mathbf{c}(\widehat{\mathbf{a}}, N)$ *рассеивает* координаты $\widehat{\mathbf{a}}_n$. Как легко видеть,

$$
\mathbf{c}(\widehat{\mathbf{a}}, N) = \widehat{\mathbf{a}}, \quad n \leqslant N-1; \qquad \widehat{\mathbf{a}} - \mathbf{c}(\widehat{\mathbf{a}}, N) \perp \mathbf{c}(\widehat{\mathbf{a}}, N). \tag{35}
$$

Лемма 3. 1) *Пусть* (*см.* (34))

$$
B(a, N, \vartheta) := \sum_{m \in (-N,N],\, |m| \leqslant n(2)} c_m(\widehat{\mathbf{a}}, N)\, e^{im\vartheta}.
$$

Тогда набор оптимальных весов $\vec{w}(a,n,N) = \{w_j\}_1^N$ *и оптимальная погрешность равнораспределенной квадратуры могут быть найдены из соотношений*

$$
\begin{aligned}
w_j &= \frac{B(a,N,\vartheta_j)}{N}, \quad j = 1, \dots, N; \\
\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}[a, \vec{\vartheta}] &= \mathscr{E}_N^{\mathrm{dif}}[\widehat{\mathbf{a}}] = \sqrt{|\widehat{\mathbf{a}}|^2 - |\mathbf{c}(\widehat{\mathbf{a}}, N)|^2}\,.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

2) *Для* $f(\mathbf{x}) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$

$$
\mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f] = \sqrt{\sum_{n=N}^{\infty} (n+1)\big(\mathscr{E}_N^{\mathrm{dif}}[\widehat{\mathbf{a}}_n]\big)^2}, \tag{37}
$$

а если $f(\mathbf{x}) \in^{\perp} \mathscr{P}_{N-1}^2$, *то оптимальные профили* (*высокочастотные*)

$$
\vec{W}(x) = \{W_j(x)\}_1^N = \arg\min \left\| f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{N} W_j(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}_j) \right\|
$$

определяются суммами рядов по многочленам Чебышёва второго рода

$$
W_j(x) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{n+1}{N} B(a_n(f), N, \vartheta_j) u_n(x). \tag{38}
$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{j=1}^{N} e^{im\vartheta_j} D_n(\vartheta_k - \vartheta_j) = N\delta(m,n,N)e^{im\vartheta_k};$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} B(a,N,\vartheta_j)\, D_n(\vartheta_k - \vartheta_j) = a(\vartheta_k).$$

Поэтому соотношение $\vec{w} = \dfrac{1}{N}\vec{B}$ для оптимальных весов вытекает из (26). А равенство $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}[a,\vec{\vartheta}] = \mathscr{E}_N^{\mathrm{dif}}[\widehat{\mathbf{a}}]$ является следствием из (28) и (35); соотношения (37) и (38) следуют из (6), (36) и (30).

Теперь мы можем завершить доказательство соотношений (13) в теореме 3.

Согласно (21), моменты $a_n(f_{\mathrm{rad}})$ – постоянные, причем $a_{2\nu+1}(f_{\mathrm{rad}}) = 0$. Поэтому для четных n

$$\widehat{a}_{m,n} = 0,\ m \neq 0;\quad \widehat{a}_{0,n} = \alpha_n;\quad \delta(0,n,N) = 2\left[\frac{n}{2N}\right] + 1;\quad B(\vartheta) = \frac{\alpha_n}{\delta(0,n,N)};$$

$$\left(\mathscr{E}_N^{\mathrm{dif}}[\widehat{\mathbf{a}}_n]\right)^2 = |\alpha_n|^2\left(1 - \frac{1}{\delta(0,n,N)}\right) = |\alpha_n|^2\frac{2\left[\frac{n}{2N}\right]}{2\left[\frac{n}{2N}\right]+1} = |\alpha_n|^2\frac{2q}{2q+1}, \tag{39}$$

$$n = 2(qN+m),\quad m = 0,1,\dots,N-1,\quad q = 1,2,\dots.$$

Пусть $\varepsilon_n := (\mathscr{E}_n[f])^2$, $\omega_n := (n+1)|\alpha_n(f)|^2$; заметим, что $\omega_n = 0$ для нечетных n. Тогда в силу (20) $\varepsilon_N = \sum\limits_{n=N}^{\infty} \delta_n$, и, используя (37), мы имеем

$$\begin{aligned}
\left(\mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f]\right)^2 &= \sum_{n=N}^{\infty} (n+1)\left(\mathscr{E}_N^{\mathrm{dif}}[\widehat{\mathbf{a}}_n]\right)^2 \\
&= \sum_{n=N}^{\infty} \omega_n \frac{2\left[\frac{n}{2N}\right]}{2\left[\frac{n}{2N}\right]+1} = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{2q}{2q+1}\sum_{n=2qN}^{2(q+1)N-1}\omega_n \\
&= \sum_{q=1}^{\infty}\frac{2q}{2q+1}\left(\varepsilon_{2qN} - \varepsilon_{2(q+1)N}\right) = 2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_{2qN}}{4q^2-1},
\end{aligned}$$

откуда и следуют соотношения (13) для f_{rad}.

Нетрудно также найти и явное представление минимайзера

$$W(x) := \arg\min\left\| f_{\mathrm{rad}} - \sum_{j=1}^{N} W(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}_j)\right\|.$$

Если $f_{\mathrm{rad}} = g(|\mathbf{x}|^2)$ и $g(x) \overset{\mathscr{L}^2(0,1)}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \grave{g}_n\, l_n(x)$ – ряд Фурье–Лежандра функции g, то

$$W(x) \overset{\mathscr{L}^2_\omega(-1,1)}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\grave{g}_n}{\sqrt{2n+1}\,\left(2\left[\frac{n}{N}\right]+1\right)} u_{2n}(x), \qquad \omega(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,.$$

Далее, согласно (22), $a_n(f_{\mathrm{harm}}, \vartheta) := \beta e^{-in\vartheta} + \gamma e^{in\vartheta}$. В этом случае $\widehat{a}(-n) = \beta, \widehat{a}(n) = \gamma; \widehat{a}(l) = 0, |l| < n(2), \delta(\pm n, n, N) = \left[\dfrac{n}{N}\right] + 1,$

$$\left(\mathscr{E}_N^{\mathrm{dif}}[\widehat{\mathbf{a}}_n]\right)^2 = \begin{cases} (|\beta|^2 + |\gamma|^2)\dfrac{q}{q+1}\,, & \text{если } n = qN + m,\ m = 1,\dots,N-1, \\ |\beta|^2 + |\gamma|^2 - \dfrac{|\beta+\gamma|^2}{q+1}\,, & \text{если } n = qN,\ q = 1, 2, \dots\,. \end{cases}$$

В частности, $\left(\mathscr{E}_N^{\mathrm{dif}}[\widehat{\mathbf{a}}_n]\right)^2 \geqslant \frac{1}{3}(|\beta|^2 + |\gamma|^2)$ для $n \geqslant N+1$. После этого оценки (13) для $\mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f_{\mathrm{harm}}]$ доказываются так же, как и в только что рассмотренном случае $\mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f_{\mathrm{rad}}]$.

2.5. Доказательство теоремы 2. *Восстановление интегралов.* Сначала мы установим нижние оценки величин $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}[1]$ в (11).

Основная идея в том, что *линейные комбинации* $\sum\limits_{j=1}^{N} w_j D_{n-1}(\vartheta - \vartheta_j)$ *малого числа сдвигов ядер Дирихле высокого порядка – всегда быстро колеблющиеся функции, и поэтому не могут приближать медленные полиномы* $a(\vartheta)$, *например, постоянные* $\equiv 1$. Запишем такую линейную комбинацию в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{N} w_j \frac{\sin n(\vartheta - \vartheta_j)}{\sin(\vartheta - \vartheta_j)} = F(\vartheta)\sin n\vartheta - G(\vartheta)\cos n\vartheta = H(\vartheta)\sin(n\vartheta - \Phi(\vartheta)), \tag{40}$$

где

$$F(\vartheta) := \sum_{j=1}^{N} \frac{w_j \cos n\vartheta_j}{\sin(\vartheta - \vartheta_j)}\,, \qquad G(\vartheta) := \sum_{j=1}^{N} \frac{w_j \sin n\vartheta_j}{\sin(\vartheta - \vartheta_j)}\,,$$

$$\Phi(\vartheta) := \operatorname{arctg}\frac{G(\vartheta)}{F(\vartheta)}\,,$$

и $H(\vartheta) = \sqrt{F^2(\vartheta) + G^2(\vartheta)}$. Введем в рассмотрение множества

$$\mathscr{E}_- := \{\vartheta : \vartheta \in [0, 2\pi),\ \sin(n\vartheta - \Phi(\vartheta)) \leqslant 0\}, \quad \mathscr{E}_+ := [0, 2\pi) \setminus \mathscr{E}_-,$$
$$\mathscr{F}_+ := \{\varphi : \varphi = n\vartheta - \Phi(\vartheta),\ \vartheta \in \mathscr{E}_+\},$$
$$\mathscr{G}_- := \{\varphi : \sin\varphi \leqslant 0,\ \varphi \in [0, 2\pi n)\},$$

и докажем следующие оценки для мер Лебега:

$$|\operatorname{meas}\mathscr{E}_\pm - \pi| \leqslant \frac{2\pi N}{n} = \frac{2\pi N}{n}. \tag{41}$$

Интерпретация этих оценок такова: $\Phi(\vartheta)$ есть "медленное" возмущение функции $n\vartheta$, если n существенно больше чем N. Далее, достаточно установить лишь одну оценку $\operatorname{meas}\mathscr{E}_- \geqslant \pi - \frac{2\pi N}{n}$, поскольку $\mathscr{E}_+ \cup \mathscr{E}_- = [0, 2\pi)$, $\mathscr{E}_+ \cap \mathscr{E}_- = \varnothing$, а "обратные" оценки $\operatorname{meas}\mathscr{E}_+ \geqslant \pi - \frac{2\pi N}{n}$, $\operatorname{meas}\mathscr{E}_- \leqslant \pi + \frac{2\pi N}{n}$ выполнены в силу симметрии.

Пусть $N(t)$ обозначает индикатрису Банаха функции $\Phi(\vartheta)$, т.е.

$$N(t) := \#\{\vartheta \in [0, 2\pi) : \Phi(\vartheta) = t\}, \qquad |t| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

По определению $\Phi(\vartheta)$, $N(t)$ равна числу решении $\vartheta \in [0, 2\pi)$ уравнения $G(\vartheta) = (\operatorname{tg} t)H(\vartheta)$. За исключением разве лишь одного значения t, $N(t) \leqslant 2N - 1$, поскольку нетривиальный тригонометрический полином порядка $N - 1$ не может иметь более $2N - 1$ нулей на периоде. Следовательно, период может быть представлен как объединение $M \leqslant 2N - 1$ попарно не пересекающихся интервалов $\bigcup_{k=1}^{M} I_k$ и $\Phi(\vartheta)$ монотонная и абсолютно непрерывная на каждом из I_k. Учитывая также, что $|\Phi(\vartheta)| \leqslant \frac{\pi}{2}$, получаем:

$$\operatorname{meas}\mathscr{F}_+ \geqslant n \operatorname{meas}\mathscr{E}_+ - M\pi \geqslant n \operatorname{meas}\mathscr{E}_+ - 2\pi N + \pi.$$

С другой стороны,

$$\mathscr{G}_- \cap \mathscr{F}_+ = \varnothing, \qquad \mathscr{G}_- \cup \mathscr{F}_+ \subset \left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$\operatorname{meas}\mathscr{G}_- + \operatorname{meas}\mathscr{F}_+ \leqslant 2\pi n + \pi, \qquad \operatorname{meas}\mathscr{G}_- = \pi n,$$

и, таким образом, $\operatorname{meas}\mathscr{F}_+ \leqslant \pi n + \pi$. Сравнивая полученные оценки, мы заключаем, что $\pi n + \pi \geqslant n \operatorname{meas}\mathscr{E}_+ - 2\pi N + \pi$, или $\operatorname{meas}\mathscr{E}_+ \leqslant \pi + \frac{2\pi N}{n}$. Как уже говорилось, отсюда вытекают оценки (41).

Значит,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \left(1 - \sum_{j=1}^{N} w_j D_{n-1}(\vartheta - \vartheta_j)\right)^2 \mu(d\vartheta) \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \left[1 - H(\vartheta)\sin\left(n\vartheta - \Phi(\vartheta)\right)\right]^2 \mu(d\vartheta) \\
&\quad \geqslant \int_{\mathscr{E}_-} \mu(d\vartheta) = \frac{\operatorname{meas}\mathscr{E}_-}{2\pi} \geqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2N}{n}\right),
\end{aligned}$$

а поскольку величина в правой части не зависит от выбора $\vec{w}$ и $\vec{\vartheta}$, это завершает доказательство нижней оценки $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}[1]$ в (11).

Оценки снизу величин $\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}_N[f_{\mathrm{rad}}]$ в (14) вытекают из (7), уже доказанных нижних оценок для $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[1]$ в (11), а также оценки (13), т.е. сравнения $\mathscr{R}^{\mathrm{eq}}_N[f_{\mathrm{rad}}]$ и $\mathscr{E}_{2N}[f_{\mathrm{rad}}]$:

$$\begin{aligned}
\left(\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}_N[f_{\mathrm{rad}}]\right)^2 &\geqslant \sum_{m=N}^{\infty}(2m+1)|\alpha_{2m}|^2\left(\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{2m,N}[1]\right)^2\\
&\geqslant \frac{1}{2}\sum_{m=N}^{\infty}(2m+1)|\alpha_{2m}|^2\left(1-\frac{N}{m}\right)\\
&\geqslant \sup_{M>N}\frac{M-N}{2M}\sum_{m=M}^{\infty}(2m+1)|\alpha_{2m}|^2\\
&= \sup_{M>N}\frac{M-N}{2M}\left(\mathscr{E}_{2M}[f_{\mathrm{rad}}]\right)^2\\
&\geqslant \sup_{M>N}\frac{M-N}{2M}\left(\mathscr{R}^{\mathrm{eq}}_M[f_{\mathrm{rad}}]\right)^2.
\end{aligned}$$

А теперь обратимся к верхним оценкам величин $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[1]$ в (11) (предлагаемый ниже метод не применим к задаче рельефной аппроксимации, поскольку распределение узлов оказывается зависящим от n). Пусть $\mu := \dfrac{n}{2}+1$, $l := \mu - N$, $\vartheta_j = \vartheta_j^{(n)} := \dfrac{\pi j}{\mu}$, $j = 0, \pm 1, \ldots$. Рассмотрим "неполную" квадратурную формулу прямоугольников с узлами $\{\vartheta_j\}$, $j = 1, \ldots, N$, и постоянным весом $w_j := 1/\mu$.

Идея формул такого вида была высказана Е. А. Рахмановым (частное сообщение). "Расширим" эту формулу, добавив к ней l дополнительных узлов $\vartheta_j := \dfrac{\pi j}{\mu}$, $j = N+1, N+2, \ldots, \mu$. Так как

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{\mu}D_n(\vartheta-\vartheta_j) &= \frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{|m|\leqslant\mu-1}e^{i2m(\vartheta-\vartheta_j)}\\
&= \sum_{|m|\leqslant\mu-1}e^{2im\vartheta}\,\frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{\mu}e^{-\frac{2\pi i m j}{\mu}} \equiv 1,
\end{aligned}$$

то расширенная (полная) формула прямоугольников точна для всех полиномов класса $\mathscr{T}^{\pm}_n$. В частности,

$$1-\frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{N}D_n(\vartheta-\vartheta_j) = \frac{1}{\mu}\sum_{j=N+1}^{\mu}D_n(\vartheta-\vartheta_j).$$

Далее,

$$\sum_{j=N+1}^{\mu} D_n(\vartheta-\vartheta_j) = \sum_{|m|\leqslant\mu-1} e^{-2im\vartheta} \sum_{j=N+1}^{\mu} e^{2ij\vartheta_m}$$
$$= \sum_{|m|\leqslant\mu-1} e^{-2im\vartheta}\, u_m D_{l-1}(\vartheta_m),$$

где $u_m = u_{m,l}$ – унимодулярные комплексные множители, т.е. $|u_m| = 1$, так что

$$\left\| \sum_{j=N+1}^{\mu} D_n(\vartheta-\vartheta_j),\ \mathscr{L}^2_{2\pi} \right\|^2 = \sum_{|m|\leqslant\mu-1} D^2_{l-1}(\vartheta_m)$$
$$= 2\sum_{m=0}^{\mu-1} D^2_{l-1}(\vartheta_m) - D^2_{l-1}(0)$$
$$= 2\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi} D^2_{l-1}(\vartheta)\,d\vartheta - l^2 = 2\mu l - l^2.$$

Отсюда следует, что

$$\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[1] \leqslant \frac{1}{\mu}\left\| \sum_{j=N+1}^{\mu} D_n(\vartheta-\vartheta_j),\ \mathscr{L}^2_{2\pi} \right\| \leqslant \sqrt{\frac{l}{\pi\mu}} = \sqrt{2\left(1-\frac{2N}{n+2}\right)},$$

что и заканчивает доказательство оценки сверху в (11).

Коллапсированные квадратуры и рельефные функции. Перейдем к оптимизации коллапсированных квадратур и рельефных функций, см. (1) и (9).

Лемма 2.4. 1) *Пусть* $a(\vartheta) = \sum_{|m|\leqslant n(2)} \widehat{a}_m e^{im\vartheta} \in \mathscr{T}^{\pm}_n$. *Тогда*

$$\mathscr{Q}^{\mathrm{col}}_{n,N}[a,\varphi] = \min_{P\in\mathscr{P}^1_{N-1}} \sqrt{\sum_{|m|\leqslant n(2)} |\widehat{a}_m - P(m)e^{-im\varphi}|^2}\,. \tag{42}$$

В частности, для $\varphi = 0$ задача об оптимальной полностью коллапсированной квадратуре двойственна наилучшей дискретной алгебраической аппроксимации в метрике l^2 последовательности данных $\{\widehat{a}_m\}_{|m|\leqslant n(2)}$:

$$\mathscr{Q}^{\mathrm{col}}_{n,N}[a,0] = \min_{P\in\mathscr{P}^1_{N-1}} \sqrt{\sum_{|m|\leqslant n(2)} |\widehat{a}_m - P(m)|^2}\,. \tag{43}$$

2) *Пусть* $\{W_j(x)\}_{j=1}^N$, $|x| \leqslant 1$, – *произвольный набор достаточно гладких функций одной действительной переменной, и* $W_j(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \check{W}_{j,n} u_n(x)$ – *ряд Фурье–Чебышёва функции* $W_j(x)$. *Тогда*

$$a_n\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{i\partial}{\partial\varphi}\right)^{j-1} W_j(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\varphi}),\, \vartheta\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{|m|\leqslant n(2)} P(m) e^{im(\vartheta-\varphi)}, \tag{44}$$

где $P(x) := \sum\limits_{j=1}^{N} \check{W}_{j,n} x^{j-1}$.

3) *Пусть* $f(\mathbf{x}) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$ *и* $a_n(f,\vartheta) = \sum\limits_{|m|\leqslant n(2)} \widehat{a}_{m,n}(f) e^{im\vartheta}$ – *чебышёвские моменты функции* f. *Тогда*

$$\mathscr{R}_N^{\mathrm{col}}[f,0] = \sqrt{\sum_{n=N}^{\infty} (n+1) \min_{P\in\mathscr{P}_{N-1}^1} \sum_{|m|\leqslant n(2)} |\widehat{a}_{m,n}(f) - P(m)|^2}\,. \tag{45}$$

Доказательство. 1) Зафиксируем алгебраический многочлен $P \in \mathscr{P}_{n-1}^1$ и тригонометрический полином $T \in \mathscr{T}_n^{\pm}$. Имеем:

$$P\left(\frac{id}{d\varphi}\right)T(\varphi) = \int_0^{2\pi} T(\vartheta) P\left(\frac{i\partial}{\partial\varphi}\right) D_n(\varphi-\vartheta)\,\mu(d\vartheta),$$

$$\int_0^{2\pi} T(\vartheta)a(\vartheta)\,\mu(d\vartheta) - P\left(\frac{id}{d\varphi}\right)T(\varphi)$$
$$= \int_0^{2\pi} T(\vartheta)\left(a(\vartheta) - \sum_{|m|\leqslant n(2)} P(m)e^{im(\vartheta-\varphi)}\right)\mu(d\vartheta);$$

$$\sup_{T\in\mathbb{B}(\mathscr{T}_n^{\pm})} \left|\int_0^{2\pi} T(\vartheta)a(\vartheta)\,\mu(d\vartheta) - P\left(\frac{id}{d\varphi}\right)T(\varphi)\right|$$
$$= \left\| a(\vartheta) - \sum_{|m|\leqslant n(2)} P(m)e^{im(\vartheta-\varphi)},\, \mathscr{L}_{2\pi}^2 \right\|,$$

откуда (42) следует с помощью равенства Парсеваля и минимизации по всем многочленам $P \in \mathscr{P}_{N-1}^1$.

2) Применим почленное дифференцирование по угловой переменной φ в разложении

$$W(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\varphi}) = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \check{W}_n \mathscr{D}_n(\vartheta-\varphi) u_n(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta})\right)\mu(d\vartheta).$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{i\partial}{\partial\varphi}\right)^{j-1} W_j(\mathbf{x}\cdot\varphi)\\
&\quad=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\check{W}_{j,n}u_n(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta})\left(\frac{i\partial}{\partial\varphi}\right)^{j-1}\mathscr{D}_n(\vartheta-\varphi)\right)\mu(d\vartheta)\\
&\quad=\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\check{W}_{j,n}u_n(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta})\left(\sum_{|m|\leqslant n(2)} m^{j-1}e^{im(\vartheta-\varphi)}\right)\mu(d\vartheta),
\end{aligned}
$$

откуда вытекает (44).

3) (45) есть прямое следствие (43) и (9).

Лемма 5. *Для каждого набора из N точек на единичной окружности $Z=\{z_j\}_1^N$, $|z_j|=1$, в комплексной плоскости и каждого натурального m найдется многочлен $P(z)=P_Z(z)$, обладающий свойствами*

$$
P(z)\in\mathscr{P}^1_{mN},\ \ P(0)=1,\ \ P(z_j)=0,\ \ j=1,\dots,N;\quad \max_{|z|\leqslant 1}|P(z)|\leqslant e^{\frac{2N}{m}}. \tag{46}
$$

В частности, для $n\geqslant N$ и фиксированных комплексных β, γ

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[e^{\pm in\vartheta}]=\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{N}[1,\mathbb{B}(\mathscr{P}^1_n)]\geqslant e^{-\frac{4N^2}{n}},\\
&\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[\beta e^{in\vartheta}+\gamma e^{-in\vartheta}]\geqslant\sqrt{|\beta|^2+|\gamma|^2}\,e^{-\frac{8N^2}{n}}.
\end{aligned}\tag{47}
$$

Лемма 6. *Пусть $n\geqslant N$ и β, γ – комплексные числа. Тогда*[3)]

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{Q}^{\mathrm{col}}_{n,N}[\beta e^{in\vartheta}+\gamma e^{-in\vartheta},0]\\
&\quad=\min_{P\in\mathscr{P}^1_{N-1}}\sqrt{|\beta-P(-n)|^2+\sum_{|m|<n(2)}|P(m)|^2+|\gamma-P(n)|^2},
\end{aligned}\tag{48}
$$

и, далее,

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{Q}^{\mathrm{col}}_{n,N}[\beta e^{in\vartheta}+\gamma e^{-in\vartheta},0]\leqslant\sqrt{|\beta|^2+|\gamma|^2}\,\min\bigl(1,\sqrt{2n}e^{-\frac{N}{\sqrt{n}}}\bigr),\\
&\qquad\qquad n\geqslant N\geqslant 5.
\end{aligned}\tag{49}
$$

[3)]Задача о структуре минимайзера в задаче $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[e^{\pm in\vartheta}]$ остается открытой. В частности, представляется интересным выяснить, могут ли полностью коллапсированные узлы решать точную оптимизационную задачу, т.е. $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[e^{\pm in\vartheta}]=\mathscr{Q}^{\mathrm{col}}_{n,N}[e^{\pm in\vartheta}]$.

Доказательство леммы 5. Мы воспользуемся известным решением задачи, поставленной, по-видимому, Г. Халашем. *Требуется найти величину*

$$\kappa_m := \min_{p\in \mathscr{P}_m^{(1,0)}} \max_{|z|\leqslant 1} |p(z)|, \quad \textit{где} \quad \mathscr{P}_m^{(1,0)} := \{p(z) \in \mathscr{P}_m^1,\ p(0) = 1,\ p(1) = 0\}$$

и экстремальный многочлен, для которого достигается min. Точное решение этой задачи было найдено в работе [8]: $\gamma_m = \left(\sec \dfrac{\pi}{2(m+1)}\right)^{m+1}$, причем интересно заметить, что экстремальным в этой задаче является соответственным образом нормированный многочлен Чебышёва первого рода. Для нашей цели достаточен упрощенный вариант, а именно, оценка $\kappa_m \leqslant 1 + \dfrac{2}{m}$. Она была установлена Х. Л. Монтгомери (см. [7; гл. 5]). Положим $P(z) := \prod\limits_{j=1}^{N} p(zz_j^{-1})$, где $p(z) \in \mathscr{P}_m^{(1,0)}$ – m-й экстремальный многочлен в задаче Халаша. Тогда

$$P(z) \in \mathscr{P}_{mN}^1,\ P(0) = 1,\ P(z_j) = 0,\ j = 1, \dots, N;$$
$$\max_{|z|\leqslant 1} |P(z)| \leqslant (\kappa_m)^N \leqslant \left(1 + \frac{2}{m}\right)^N \leqslant e^{\frac{2N}{m}},$$

что и доказывает (46).

Любой тригонометрический полином $T(\vartheta) \in \mathbb{B}(\mathscr{T}_n^{\pm})$ представляется в виде $T(\vartheta) = e^{-in\vartheta}P(e^{2i\vartheta})$, $P \in \mathbb{B}(\mathscr{P}_n^1)$, и соответственно этому

$$\int_0^{2\pi} T(\vartheta)e^{-in\vartheta}\, \mu(d\vartheta) - \sum_{j=1}^{N} w_jT(\vartheta_j)$$
$$= P(0) - \sum_{j=1}^{N}(w_je^{-in\vartheta_j})P(z_j), \qquad z_j := e^{2i\vartheta_j}. \qquad (50)$$

Отсюда легко вытекают равенства

$$\mathscr{Q}_{n,N}^{\mathrm{opt}}[e^{\pm in\vartheta}] = \mathscr{Q}_N^{\mathrm{opt}}[1, \mathbb{B}(\mathscr{P}_n^1)] \quad \text{и} \quad \mathscr{Q}_{n,N}^{\mathrm{col}}[e^{\pm in\vartheta}] = \mathscr{Q}_N^{\mathrm{col}}[1, \mathbb{B}(\mathscr{P}_n^1)].$$

Нижние оценки в (47) вытекают из (46). В самом деле, пусть $m := \left[\dfrac{n}{N}\right]$. Для данного набора узлов $Z = \{z_j\}_1^N$, $|z_j| = 1$, рассмотрим многочлен $\Pi(z) := e^{-\frac{2N}{m}}P_Z(z)$, где $P_Z(z)$ обладает свойствами (46). Тогда $\Pi \in \mathscr{P}_{mN}^1 \subset \mathscr{P}_n^1$, $\Pi(z_j) = 0$, и $\Pi \in \mathbb{B}(\mathscr{P}_n^1)$, поскольку $|\Pi(z)| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$. Следовательно, для любой квадратуры с узлами в точках набора Z и произвольными весами мы имеем $\Pi(0) - \sum\limits_{j=1}^{N} w_j\Pi(z_j) = \Pi(0) \geqslant e^{-\frac{2N}{m}} \geqslant e^{-\frac{4N^2}{n}}$, $n \geqslant N$, откуда и следует оценка

$\mathscr{Q}_N^{\mathrm{opt}}[1,\mathbb{B}(\mathscr{P}^1_n)] \geqslant e^{-\frac{4N^2}{n}}$. Далее, нижняя оценка для $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[\beta e^{in\vartheta}+\gamma e^{-in\vartheta}]$ следует путем расщепления полиномов $T(\vartheta)\in\mathscr{T}^{\pm}_n$ на две части $T_+(\vartheta):=\sum\limits_{0\leqslant m\leqslant n(2)}\widehat{T}(m)e^{im\vartheta}$, $T_-(\vartheta):=T(\vartheta)-T_+(\vartheta)$ и последующей редукцией к нижней оценке $\mathscr{Q}_N^{\mathrm{opt}}[1,\mathbb{B}(\mathscr{P}^1_{n/2})]$. Детали мы опускаем.

Доказательство леммы 6. Прежде всего, (48) есть частный случай (43). Далее, пусть $T_M(x)=\cos(M\arccos x)$, $x\in[-1,1]$, – многочлен Чебышёва первого рода, $M=N-1$ или $M=N-2$, и

$$P_{n,M}(x):=\frac{T_M\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)\frac{x}{n}\right)}{T_M\left(1+\frac{2}{n}\right)},$$

$$P_{n,N}(x,\beta,\gamma):=\frac{\gamma-(-1)^N\beta}{2}P_{n,N-1}(x)+\frac{\gamma+(-1)^N\beta}{2}P_{n,N-2}(x).$$

Эти многочлены принадлежат $\mathscr{P}^1_{N-1}$, и поскольку $P_{n,M}(1)=1$, $P_{n,M}(-1)=(-1)^M$, мы видим, что $P_{n,N}(-n,\beta,\gamma)=\beta$, $P_{n,N}(n,\beta,\gamma)=\gamma$. Для $|m|\leqslant n-2$ имеем $\left|T_M\left(\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\dfrac{m}{n}\right)\right|\leqslant 1$, так что соотношения (49) вытекают с помощью оценок

$$\sum_{|m|<n(2)}|P_{n,M}(m)|^2\leqslant\frac{n-1}{T_M^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}\leqslant 4(n-1)e^{-\frac{4M}{\sqrt{n+1}}},$$

$$\sum_{|m|<n(2)}|P_{n,N}(m,\beta,\gamma)|^2\leqslant 2(n-1)(|\beta|^2+|\gamma|^2)e^{-\frac{4(N-2)}{\sqrt{n+1}}}$$
$$\leqslant 2n(|\beta|^2+|\gamma|^2)e^{-\frac{2N}{\sqrt{n}}},\qquad N\geqslant 5.$$

Выше мы воспользовались хорошо известными представлениями и оценками многочленов Чебышёва $T_M(x)$ для $x>1$:

$$T_M(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1}\,)^M+(x-\sqrt{x^2-1}\,)^M}{2}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\exp\biggl(M\int_1^x\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\biggr)\geqslant\frac{1}{2}\exp\biggl(2M\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\biggr).$$

Соотношения (47) и (49) влекут утверждение (12) теоремы 2. Из них же следует и (15) в теореме 3. В самом деле, пусть $\delta_n:=\sqrt{|\beta_n(f)|^2+|\gamma_n(f)|^2}$. Тогда в силу (7), (20) и (47) имеем:

$$(\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}_N[f])^2\geqslant\sum_{n=N}^{\infty}(n+1)\bigl(\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_{n,N}[\beta_n e^{in\vartheta}+\gamma_n e^{-in\vartheta}]\bigr)^2\geqslant\sum_{n=N}^{\infty}(n+1)\delta_n^2e^{-\frac{16N^2}{n}}$$
$$\geqslant e^{-16}\sum_{n=N^2}^{\infty}(n+1)\delta_n^2=e^{-16}(\mathscr{E}_{N^2}[f])^2.$$

Это доказывает нижнюю оценку $\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f_{\mathrm{harm}}]$ в (15). Наконец, для $M \geqslant N \geqslant 5$

$$\begin{aligned}
\left(\mathscr{R}_N^{\mathrm{col}}[f,0]\right)^2 &= \sum_{n=N}^{\infty}(n+1)\left(\mathscr{Q}_{n,N}^{\mathrm{col}}[\beta_n e^{in\vartheta}+\gamma_n e^{-in\vartheta},0]\right)^2 \\
&\leqslant \sum_{n=N}^{\infty}(n+1)\delta_n^2 \min\left(1, 2ne^{-\frac{2N}{\sqrt{n}}}\right) \\
&\leqslant 2Me^{-\frac{2N}{\sqrt{M}}}\sum_{n=N}^{M}(n+1)\delta_n^2 + \sum_{n=M+1}^{\infty}(n+1)\delta_n^2 \\
&\leqslant 2Me^{-\frac{2N}{\sqrt{M}}}(\mathscr{E}_N[f])^2 + (\mathscr{E}_{M+1}[f])^2.
\end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы 3.

2.6. Комментарии. Представляется трудным указать на литературный первоисточник, в котором сформулирована общая задача рельефной аппроксимации. Для автора данной работы одним из таких источников служила статья [3].

Различные аспекты этой задачи являются естественными составными частями многих теоретических и прикладных тем, например, трансформации Радона и томографии [4], [2], уравнений математической физики, геометрии, см. [9].

В недавний период многие исследователи проявили интерес к *рельефной аппроксимации с ограничениями* того или иного характера, которые накладываются на профили волн. Сюда относятся и некоторые варианты аппроксимации так называемыми "нейронными сетями", где профили $W_j(x)$ представлены кусочно постоянными функциями или более гладкими сплайнами, см., например, [10].

Следует заметить, что остается практически полностью открытым широкий круг задач рельефной аппроксимации, свободной и с ограничениями, в метриках функциональных пространств отличных от $\mathscr{L}^2$, в частности, равномерной метрике $\mathscr{L}^\infty$. Весьма интересными и трудными представляются обобщения для функций более чем двух переменных, см. [11], [12].

Свободная рельефная аппроксимация, в частности, сравнения эффективностей $\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f]$ с $\mathscr{E}_N[f]$ и $\mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f]$ обсуждались Д. Л. Донохо и И. М. Джонстон [6]. В [6; с. 73] было высказано предположение, что *равнораспределенные волновые векторы оптимальны в задаче $\mathscr{R}^{\mathrm{fr}}$ для всех f_{rad} и f_{harm}* (для краткости мы ниже называем эту гипотезу (*eq*)). Заметим, что в [6] рассматривается аппроксимация в весовом пространстве $\mathscr{L}_w^2(\mathbb{R}^2)$ с двумерным весом Гаусса $w(\mathbf{x}) := e^{-\pi|\mathbf{x}|^2}$:

$$\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f,\mathscr{L}_w^2(\mathbb{R}^2)] := \inf_{R\in\mathscr{W}_N^{\mathrm{fr}}}\sqrt{\iint_{\mathbb{R}^2}|f(\mathbf{x})-R(\mathbf{x})|^2 w(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}}\,.$$

Сильная форма гипотезы (*eq*) формулируется в виде равенств $\mathscr{R}_N^{\mathrm{fr}}[f,\ \mathscr{L}_w^2(\mathbb{R}^2)] = \mathscr{R}_N^{\mathrm{eq}}[f,\ \mathscr{L}_w^2(\mathbb{R}^2)]$: эти равенства должны быть справедливы для f_{rad} и f_{harm} при всех N.

Ослабленная версия гипотезы (eq), относительно *порядков* рельефной аппроксимации $f_{\rm rad}$ в метрике $\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$, подтверждается теоремой 3 настоящей работы (см. (13) и (14), следствие 1, а также [5]).

Напротив, (15) означает что для $f_{\rm harm}$ и метрики $\mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)$ гипотеза (eq) принципиально не оправдывается.

(15) по-видимому представляет собой новый эффект в задачах нелинейной рельефной аппроксимации. Полная свобода в выборе N волновых векторов действительно приносит большое преимущество в порядках приближения. Гармонические функции составляют широкое нетривиальное множество, для которого проявляется этот эффект.

Верхние грани величин $\mathscr{R}^{\rm fr}_N(f)$ на классах типа Соболева изучались В. Е. Майоровым [13], [12] и В.Н. Темляковым [14]. В недавней работе [12] Майоров рассматривает рельефные аппроксимации на классах функции $W_2^{r,d}$ в единичном шаре $\mathbb{B}^d$, $d \geqslant 2$, d-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^d$:

$$\operatorname{dist}\big(W_2^{r,d}, \mathscr{W}_N; \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^d)\big) := \sup_{f\in W_2^{r,d}} \mathscr{R}^{\rm fr}_N[f];$$

$$W_2^{r,d} := \Big\{ f(\mathbf{x}) : \max_{\rho\leqslant r} \|\mathscr{D}^\rho f;\, \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^d)\| \leqslant 1 \Big\}.$$

В [12] установлен, в частности, улучшенный вариант более ранних результатов из [14] и [13], которые касались только функций двух переменных, т.е. $d = 2$. Главный результат [12; Th. 1]: выполнена точная порядковая оценка

$$\operatorname{dist}\big(W_2^{r,d}, \mathscr{W}_N, \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^d)\big) \sim N^{-\frac{r}{d-1}}, \qquad N \to \infty.$$

Возвращаясь к гипотезе (eq), отметим, что известны контр-примеры и к ее сильному варианту в случае $f = f_{\rm rad}$ (см. М. Е. Дависон и Ф. А. Грунбаум [2; с. 104]). Существуют радиальные многочлены $P(|\mathbf{x}|^2)$, $\deg P = 2, 3, \dots$ такие, что для рельефных аппроксимаций в весовых пространствах $\mathscr{L}^2_\omega(\mathbb{B}^2)$ выполнены строгие неравенства

$$\mathscr{R}^{\rm fr}_2[P(|\mathbf{x}|^2)] < \mathscr{R}^{\rm eq}_2[P(|\mathbf{x}|^2)],$$

где $\omega(\mathbf{x}) = (1-|\mathbf{x}|^2)^\lambda$, $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^2$, – вес типа Гегенбауэра. Например, оказалось, что в точном решении экстремальной задачи $\mathscr{R}^{\rm fr}_2[|\mathbf{x}|^4 - |\mathbf{x}|^2, \mathscr{L}^2(\mathbb{B}^2)]$, угол между оптимальными направлениями $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta}_2$ есть $\vartheta_2 - \vartheta_1 = \arccos\sqrt{\frac{3}{8}}$, т.е., во всяком случае, оптимальные векторы $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta}_2$ не перпендикулярны друг другу, см. [5]. В терминах оптимальных квадратур этот результат означает, что в случае только двух узлов и класса полиномов $\mathbb{B}(\mathscr{T}_4^{\pm})$ выполнены строгие неравенства $\mathscr{Q}^{\rm opt}_{4,2}[1] < \mathscr{Q}^{\rm eq}_{4,2}[1]$, или, что то же самое,

$$\mathscr{Q}^{\rm opt}_2[1, \mathbb{B}(\mathscr{T}_2)] < \mathscr{Q}^{\rm eq}_2[1, \mathbb{B}(\mathscr{T}_2)]. \tag{51}$$

Выше $\mathbb{B}(\mathscr{T}_n)$ – это единичный шар в $\mathscr{L}^2_{2\pi}$ подпространства $\mathscr{T}_n$ всех тригонометрических полиномов порядка n. При этом нетрудно видеть, что $\mathscr{Q}^{\rm opt}_N[1, \mathbb{B}(\mathscr{T}_n)] = \mathscr{Q}^{\rm opt}_N[1, \mathbb{B}(\mathscr{T}^{\pm}_{2n})] := \mathscr{Q}^{\rm opt}_{2n,N}[1]$.

Проблема Колмогорова–Никольского имеет длительную историю, см. [1], [15]–[17]. В 60-х–80-х годах существенные усилия были сосредоточены вокруг гипотезы (eq) для квадратур: ***равноотстоящие узлы и формула прямоугольников***

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{2\pi}{N}\right)$$

оптимальны для восстановления интегралов $\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\,\mu(d\vartheta)$ на всех периодических классах $W^r(\mathscr{L}^p_{2\pi})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Для $p = \infty$ и всех натуральных $r \geqslant 4$ (малые $r = 1, 2, 3$ были рассмотрены еще ранее) справедливость этой гипотезы была установлена В. П. Моторным [16]. В последствии А. А. Женсыкбаев [17] распространил этот результат Моторного на все $p \in [1, \infty)$. Для больших индексов дифференцируемости r (фактически, для $r \geqslant 4$), одна из трудностей заключалась в ***существовании оптимальных наборов узлов***, т.е. доказательстве, что узлы не коллапсируют.

С целью найти границы для гипотезы (eq), автор [18], [19] рассмотрел такие модификации периодических классов $W^r(\mathscr{L}^p_{2\pi})$:

$$\left\| P\left(\frac{d}{d\vartheta}\right) f(\vartheta),\ \mathscr{L}^p_{2\pi} \right\| \leqslant 1,$$

где $P\left(\dfrac{d}{d\vartheta}\right)$ – фиксированный дифференциальный оператор. Оказалось, что ответ качественно зависит от спектра этого оператора. В частности, для классов типа $\|f''(\vartheta) + \omega^2 f(\vartheta),\ \mathscr{L}^p_{2\pi}\| \leqslant 1$ (колебательный дифференциальный оператор) гипотеза (eq) не справедлива, по крайней мере для малых N. Соотношение (51) доставляет другой контр-пример для класса $\mathbb{B}(\mathscr{T}_2)$.

Нижние оценки величин $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_N[1, \mathbb{B}(\mathscr{T}_n)]$ и их многомерные варианты (полиномы нескольких переменных) были получены В. Н. Темляковым [20]. Основываясь на результатах Б. С. Кашина [21] (см. также [22]), в [20] доказано, что если $N \leqslant (1-\varepsilon)n$, где $\varepsilon > 0$, то величины $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_N[1, \mathbb{B}(\mathscr{T}_n)]$ ограничены снизу, т.е. $\mathscr{Q}^{\mathrm{opt}}_N[1, \mathbb{B}(\mathscr{T}_n)] \geqslant c_\varepsilon > 0$. Используя этот результат, в [5] автор доказал, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists c_\varepsilon > 0\colon\ \mathscr{R}^{\mathrm{fr}}_N(f_{\mathrm{rad}}) \geqslant c_\varepsilon \mathscr{E}_{2(1+\varepsilon)N}(f_{\mathrm{rad}}).$$

(11) и (14) – более явные варианты этих результатов.

Предварительные верхние оценки правой части (48), основанные на использовании многочленов Чебышёва $T_M(x)$, появились в обсуждениях с коллегами автора в университете Южной Каролины (USC) П. Петрушевым, Б. Поповым и О. Трифоновым. Более точный результат типа (49) был позже сообщен И. И. Шарапудиновым. А недавно, используя дискретные многочлены Чебышёва, Шарапудинов [23] доказал, что условие $\dfrac{N}{\sqrt{n}} \to \infty$ необходимо и достаточно для того, чтобы

$$\mathcal{Q}_N^{\mathrm{col}}[1, \mathbb{B}(\mathcal{P}_n^1] = \min_{P \in \mathcal{P}_N^1} \sqrt{(1 - P(0))^2 + \sum_{m=1}^{n} P^2(m)} \to 0.$$

(Ввиду этого результата, естественно предположить, что множитель $\sqrt{2n}$ в правой части оценки (49) может быть заменен на постоянную.) Отметим, что здесь необходимость условия $\dfrac{N}{\sqrt{n}} \to \infty$ вытекает также и из более общей нижней оценки (47) погрешностей квадратур со свободными узлами.

2.7. Благодарности. Автор выражает признательность своим коллегам в USC Р. ДеВору, Р. Ховарду, П. Петрушеву, Б. Попову, В. Н. Темлякову, О. Трифонову за очень полезные обсуждения и предложения. И. И. Шарапудинов консультировал автора по дискретным многочленам Чебышёва. Идея неполных формул прямоугольников в получении верхних оценок для $\mathcal{Q}_{n,N}^{\mathrm{opt}}[1, \mathbb{B}(\mathcal{T}_n)]$ принадлежит Е. А. Рахманову. Нижние оценки (47) для величин $\mathcal{Q}_N^{\mathrm{fr}}[1, \mathbb{B}(\mathcal{P}_n^1]$ были установлены при тесном сотрудничестве с Б. С. Кашиным во время его недавнего визита в USC (апрель–май 1998). Автор имел также ряд полезных обсуждений тематики оптимальных квадратур с Б. Бояновым и В. Тотиком по электронной почте.

Особенно теплая благодарность – С. М. Никольскому, который посетил USC в октябре–ноябре 1997 г., и обсуждал с автором результаты данной работы.

Работа выполнена при поддержке гранта NSF DMS-9706883.

Список литературы

[1] Никольский С. М. Квадратурные формулы. М.: Наука, 1974.
[2] Davison M. E., Grunbaum F. A. Tomographic reconstruction with arbitrary directions // Comm. Pure Appl. Math. 1981. V. 34. P. 77–120.
[3] Logan B., Schepp L. Optimal reconstruction of a function from its projections // Duke Math. J. 1975. V. 42. P. 645–659.
[4] Ramm A. G., Katsevich A. I. The Radon transform and local tomography. Boca Raton, CA: CRC Press 1996.
[5] Осколков К. И. Рельефная аппроксимация, анализ Чебышёва–Фурье и оптимальные квадратурные формулы // Труды МИАН. 1997. Т. 219. С. 269–285.
[6] Donoho D. L., Johnstone I. M. Projection-based approximation and a duality with kernel methods // Ann. Statist. 1989. V. 17. №1. P. 58–106.
[7] Montgomery H. L. Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.
[8] Lachance M., Saff E. B., Varga R. S. Inequalities for polynomials with a prescribed zero // Math. Z. 1979. V. 168. P. 105–116.
[9] Groemer H. Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
[10] DeVore R. A., Oskolkov K. I., Petrushev P. P. Approximation by feed-forward neural networks // Ann. Numer. Math. 1997. V. 4. №1–4. P. 261–287.
[11] Petrushev P. P. Approximation by ridge functions and neural networks // SIAM J. Math. Anal. 1998. V. 30. №1. P. 155–189.

[12] Majorov V. E. On best approximation by ridge functions // Preprint. Department of Mathematics, Technion, Haifa, Israel, January 14, 1998.

[13] Majorov V. E. On best approximation by ridge functions // Preprint. Department of Mathematics, Technion, Haifa, Israel, 1997.

[14] Temlyakov V. N. On approximation by ridge functions // Preprint. Department of Mathematics, University of South Carolina, 1996.

[15] Корнейчук Н. П. Сплайны в теории аппроксимации. М.: Наука, 1984.

[16] Моторный В. П. О наилучшей квадратурной формуле $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. №3. С. 583–614.

[17] Женсыкбаев А. А. Моносплайны минимальной нормы и оптимальные квадратурные формулы // УМН. 1981. Т. 36. №4. С. 107–159.

[18] Осколков К. И. Об оптимальности квадратурной формулы с равноотстоящими узлами на классах периодических функций // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. №1. С. 49–51.

[19] Oskolkov K. I. On optimal quadrature formulae on certain classes of periodic functions // Appl. Math. Optim. 1982. V. 8. P. 245–263.

[20] Temlyakov V. N. Approximation of periodic functions. Commack, NY: Nova Sci. Publ., 1993.

[21] Кашин Б. С. О некоторых свойствах тригонометрических полиномов с равномерной нормой // Труды МИАН. 1980. Т. 145. С. 111–116.

[22] Кашин Б. С. О некоторых свойствах тригонометрических полиномов в связи с равномерной сходимостью // Сообщ. АН Груз. ССР. 1979. Т. 93. С. 281–284.

[23] Шарапудинов И. И. Об одном новом применении многочленов Чебышёва, ортогональных на равномерной сетке // Матем. заметки. 1998. Т. 64. №6. С. 950–953.

Университет Южной Каролины, США
E-mail: oskolkov@math.sc.edu

Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. С. 197–219

О связи между наилучшими приближениями алгебраическими многочленами и r-м обобщенным модулем гладкости

М.К. Потапов, Ф.М. Бериша

В данной работе вводится семейство несимметричных операторов обобщенного сдвига, с их помощью определяются обобщенные модули гладкости и для них доказываются прямая и обратная теоремы теории приближений.

Библиография: 7 названий.

§1. Введение

Для 2π-периодических функций хорошо известны связи между r-м обычным модулем гладкости $\omega_r(f,\delta)_{p*}$ функции $f \in L_{p*}$ и ее наилучшими приближениями $E_n(f)_{p*}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше чем $n-1$:

$$C_1 E_n(f)_{p*} \leqslant \omega_r(f,1/n)_{p*} \leqslant C_2 \frac{1}{n^r} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{r-1} E_\nu(f)_{p*}, \qquad (1)$$

где C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от f и n ($n \in \mathbb{N}$).

При рассмотрении непериодических функций, заданных на конечном отрезке вещественной оси, уже не удается получить такие же связи между обычными модулями гладкости этих функций и их наилучшими приближениями алгебраическими многочленами.

Однако полная аналогия с 2π периодическим случаем имеет место тогда, когда обычный модуль гладкости заменен обобщенным модулем гладкости (см., например, [1]–[4]).

В этой работе доказывается аналог неравенства (1) для r-х обобщенных модулей гладкости, определяемых при помощи семейства несимметричных операторов обобщенного сдвига.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследования (проект № 99-01-00062) и программы “Ведущие научные школы” (проект № 96/97-15-96073).

§ 2. Определение обобщенного модуля гладкости

Обозначим через L_p, $1 \leqslant p < \infty$, множество функций f, измеримых по Лебегу и суммируемых в p-й степени на отрезке $[-1, 1]$, а через L_∞ обозначим множество функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$, причем

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Через $L_{p,\alpha}$ обозначим множество функций f таких, что $f(x)(1-x^2)^\alpha \in L_p$, причем

$$\|f\|_{p,\alpha} = \|f(x)(1-x^2)^\alpha\|_p.$$

Через $E_n(f)_{p,\alpha}$ обозначим наилучшее приближение функций f алгебраическими многочленами степени не выше чем $n-1$ в метрике $L_{p,\alpha}$, т.е.

$$E_n(f)_{p,\alpha} = \inf_{P_n} \|f - P_n\|_{p,\alpha},$$

где P_n – алгебраический многочлен степени не выше чем $n-1$.

Пусть $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для функции f введем оператор обобщенного сдвига по правилу

$$\widehat{T}_t(f,x,\mu) = \frac{1}{\pi(1-x^2)^{\mu/2}(\cos t/2)^{2\mu}} \int_0^\pi (1-R^2)^{\mu/2} f(R) \cos\mu(\varphi_1 - \varphi)\,d\varphi_1,$$

где

$$\begin{gathered} x = \cos\theta_1, \quad y = \cos t, \quad z = -\cos\varphi_1, \\ R = xy + z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = \cos\theta, \\ \sin\theta\cos\varphi = \cos\theta_1 \sin t + \sin\theta_1 \cos t \cos\varphi_1, \\ \sin\theta\sin\varphi = \sin\theta_1 \sin\varphi_1. \end{gathered} \tag{2}$$

При помощи этого оператора обобщенного сдвига определим r-ю обобщенную разность по правилу

$$\Delta_t^1(f,x,\mu) = \Delta_t(f,x,\mu) = \widehat{T}_t(f,x,\mu) - f(x),$$

$$\Delta_{t_1,\dots,t_r}^r(f,x,\mu) = \Delta_{t_r}(\Delta_{t_1,\dots,t_{r-1}}^{r-1}(f,x,\mu),x,\mu) \quad (r = 2,3,\dots)$$

и для функции $f \in L_{p,\alpha}$ r-й обобщенный модуль гладкости по правилу

$$\widehat{\omega}_r(f,\delta,\mu)_{p,\alpha} = \sup_{|t_i|\leqslant\delta,\, i=1,\dots,r} \|\Delta_{t_1,\dots,t_r}^r(f,x,\mu)\|_{p,\alpha} \quad (r = 1,2,\dots).$$

Полагая $y = \cos t$, $z = -\cos\varphi_1$ в операторе $\widehat{\tau}_t(f,x,\mu)$, обозначим его через $\tau_y(f,x,\mu)$ и запишем в виде

$$\tau_y(f,x,\mu) = \frac{2^\mu}{\pi(1-x^2)^{\mu/2}(1+y)^\mu}\int_{-1}^{1}(1-R^2)^{\mu/2}f(R)\cos\mu(\varphi_1-\varphi)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

где R, φ_1 и φ определены формулами (2).

Определим r-й оператор обобщенного сдвига по правилу

$$\tau_y^1(f,x,\mu) = \tau_y(f,x,\mu),$$
$$\tau_{y_1,\dots,y_r}^r(f,x,\mu) = \tau_{y_r}(\tau_{y_1,\dots,y_{r-1}}^{r-1}(f,x,\mu),x,\mu) \quad (r=2,3,\dots).$$

Обозначим через $D_{x,\nu,\mu}$ оператор дифференцирования, определяемый по правилу

$$D_{x,\nu,\mu} = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + (\mu-\nu-(\nu+\mu+2)x)\frac{d}{dx}.$$

Ясно, что

$$D_{x,\nu,\mu} = (1-x)^{-\nu}(1+x)^{-\mu}\frac{d}{dx}(1-x)^{\nu+1}(1+x)^{\mu+1}\frac{d}{dx}.$$

Будем обозначать

$$D_{x,\nu,\mu}^1 f(x) = D_{x,\nu,\mu}f(x),$$
$$D_{x,\nu,\mu}^r f(x) = D_{x,\nu,\mu}\big(D_{x,\nu,\mu}^{r-1}f(x)\big) \quad (r=2,3,\dots).$$

Будем писать, что $f(x) \in AD^r(p,\alpha,\mu)$, если $f \in L_{p,\alpha}$, $f(x)$ имеет на каждом отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$ абсолютно непрерывную $2r-1$ производную $\dfrac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}}f(x)$ и $D_{x,\mu,\mu}^l f(x) \in L_{p,\alpha}$ $(l=1,\dots,r)$.

Обозначим через

$$K_r(f,\delta,\mu)_{p,\alpha} = \inf_{g\in AD^r(p,\alpha,\mu)}\big(\|f-g\|_{p,\alpha} + \delta^{2r}\|D_{x,\mu,\mu}^r g(x)\|_{p,\alpha}\big)$$

K-функционал Петре, интерполирующий между пространством $L_{p,\alpha}$ и пространством $AD^r(p,\alpha,\mu)$.

Для $f \in L_{1,\mu}$ обозначим через $H(f,x,\mu)$ и $H_\delta(f,x,\mu)$ следующие операторы

$$H(f,x,\mu) = -\int_0^x (1-y^2)^{-\mu-1}\int_y^1 (1-z^2)^\mu\Big(f(z)-\frac{c_1}{c_0}\Big)dz\,dy,$$

где $c_1 = \int_{-1}^{1} f(z)(1-z^2)^\mu\,dz$, $c_0 = \int_{-1}^{1}(1-z^2)^\mu\,dz$, и

$$H_\delta(f,x,\mu) = \frac{1}{\kappa(\delta)}\int_0^\delta (\sin v/2)^{-1}(\cos v/2)^{-4\mu-1} \times \int_0^v \widehat{\tau}_u(f,x,\mu)\sin u/2\,(\cos u/2)^{4\mu+1}\,du\,dv,$$

где

$$\kappa(\delta) = \int_0^\delta (\sin v/2)^{-1}(\cos v/2)^{-4\mu-1}\int_0^v \sin u/2\,(\cos u/2)^{4\mu+1}\,du\,dv.$$

Определим r-ю степень оператора H по правилу

$$H^1(f,x,\mu) = H(f,x,\mu),$$

$$H^r(f,x,\mu) = H(H^{r-1}(f,x,\mu),x,\mu) = -\int_0^x (1-y^2)^{-\mu-1}\int_y^1\left(H^{r-1}(f,z,\mu)-\frac{c_r}{c_0}\right)(1-z^2)^\mu\,dz\,dy \quad (r=2,3,\dots),$$

где $c_r = \int_{-1}^{1} H^{r-1}(f,z,\mu)(1-z^2)^\mu\,dz$, и r-ю степень оператора H_δ по правилу

$$H_\delta^1(f,x,\mu) = H_\delta(f,x,\mu),$$

$$H_\delta^r(f,x,\mu) = H_\delta(H_\delta^{r-1}(f,x,\mu),x,\mu) \quad (r=2,3,\dots).$$

Будем обозначать через $P_n^{(\nu,\mu)}(x)$ $(n=0,1,\dots)$ многочлены Якоби, т.е. многочлены степени n, ортогональные друг другу с весом $(1-x)^\nu(1+x)^\mu$ на отрезке $[-1,1]$ и нормированные условием $P_n^{(\nu,\mu)}(1)=1$ $(n=0,1,\dots)$.

Через $a_n(f)$ обозначим коэффициенты Фурье–Якоби функции $f\in L_{1,\mu}$ по системе многочленов Якоби $\{P_n^{(\mu,\mu)}(x)\}_{n=0}^\infty$, т.е.

$$a_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x)P_n^{(\mu,\mu)}(x)(1-x^2)^\mu\,dx \quad (n=0,1,\dots).$$

§ 3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 [5]. *Пусть $P_n(x)$ – алгебраический многочлен степени не выше чем $n-1$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\rho\geqslant 0$,*

$$\alpha > -\frac{1}{p} \quad \text{при } 1\leqslant p<\infty,$$
$$\alpha \geqslant 0 \quad \text{при } p=\infty.$$

Тогда справедливы неравенства

$$\|P_n'\|_{p,\alpha+\frac12} \leqslant C_1 n\|P_n\|_{p,\alpha}, \qquad \|P_n\|_{p,\alpha}\leqslant C_2 n^{2\rho}\|P_n\|_{p,\alpha+\rho},$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от n $(n\in\mathbb{N})$.

Следствие. *Пусть $P_n(x)$ – алгебраический многочлен степени не выше чем $n-1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,*

$$\alpha > -\frac{1}{p} \quad \text{при } 1 \leqslant p < \infty,$$
$$\alpha \geqslant 0 \quad \text{при } p = \infty.$$

Тогда

$$\|D_{x,\mu,\mu} P_n\|_{p,\alpha} \leqslant C n^2 \|P_n\|_{p,\alpha},$$

где постоянная C не зависит от n $(n \in \mathbb{N})$.

Лемма 2 [6]. *Пусть $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда оператор τ_y обладает следующими свойствами:*

1) *оператор $\tau_y(f, x, \mu)$ линеен по f;*
2) $\tau_1(f, x, \mu) = f(x)$;
3) $\tau_y(P_n^{(\mu,\mu)}, x, \mu) = P_n^{(\mu,\mu)}(x) P_n^{(0,2\mu)}(y) \quad (n = 0, 1, \ldots)$;
4) $\tau_y(1, x, \mu) = 1$;
5) *если $g(x)\tau_y(f, x, \mu) \in L_{1,\mu}$ для любого $y \in (-1, 1)$, то*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\tau_y(g, x, \mu)(1-x^2)^\mu \, dx = \int_{-1}^{1} g(x)\tau_y(f, x, \mu)(1-x^2)^\mu \, dx;$$

6) $a_n(\tau_y(f, x, \mu)) = a_n(f) P_n^{(0,2\mu)}(y) \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Лемма 3 [6]. *Пусть даны числа p, μ и α такие, что $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,*

$$-\frac{1}{2} < \alpha - \frac{\mu}{2} \leqslant 0 \quad \text{при } p = 1,$$
$$-\frac{1}{2p} < \alpha - \frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \quad \text{при } 1 < p < \infty,$$
$$0 \leqslant \alpha - \frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} \quad \text{при } p = \infty.$$

Пусть $f \in L_{p,\alpha}$. Тогда для $0 \leqslant |t| < \pi$ справедливо неравенство

$$\|\widehat{\tau}_t(f, x, \mu)\|_{p,\alpha} \leqslant C \frac{1}{(\cos t/2)^{2\mu}} \|f\|_{p,\alpha},$$

где постоянная C не зависит от f и t.

Лемма 4 [6]. *Пусть $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть функция $f(x)$ имеет абсолютно непрерывную на каждом отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$ производную $f'(x)$. Тогда для почти всех $x \in (-1,1)$ и всех $t \in (-\pi,\pi)$ выполнены следующие равенства*

$$\widehat{\tau}_t(f,x,\mu) - f(x) = \int_0^t (\sin v/2)^{-1}(\cos v/2)^{-4\mu-1} \times \int_0^v \widehat{\tau}_u(D_{x,\mu,\mu}f,x,\mu)\sin u/2(\cos u/2)^{4\mu+1}\,du\,dv$$

и

$$\widehat{\tau}_t(f,x,\mu) - \widehat{\tau}_{\pi/2}(f,x,\mu) = -\int_{\pi/2}^t (\sin v/2)^{-1}(\cos v/2)^{-4\mu-1} \times \int_v^\pi \widehat{\tau}_u(D_{x,\mu,\mu}f,x,\mu)\sin u/2\,(\cos u/2)^{4\mu+1}\,du\,dv.$$

Лемма 5. *Пусть $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \in \mathbb{N}$. Пусть функция $f(x)$ имеет на каждом отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$ абсолютно непрерывную $2r-1$ производную $\frac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}}f(x)$. Тогда*

1) *при фиксированном $y \in (-1,1)$ функция $\tau_y(f,x,\mu)$ имеет на каждом отрезке $[c,d] \subset (-1,1)$ абсолютно непрерывную $2r-1$ производную по x $\frac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}}\tau_y(f,x,\mu)$;*
2) *для почти всех $x \in (-1,1)$ и всех $y \in (-1,1)$ справедливы равенства*

$$\tau_y(D_{x,\mu,\mu}f,x,\mu) = D_{x,\mu,\mu}\tau_y(f,x,\mu).$$

Доказательство. Докажем утверждение 1). Для $r=1$ оно доказано в работе [6]. Обозначим

$$\varphi(x) = \frac{(1-R^2)^{\mu/2}\cos\mu(\varphi_1-\varphi)}{(1-x^2)^{\mu/2}(1+y)^\mu\sqrt{1-z^2}}f(R),$$

где R, φ_1 и φ определены формулами (2).

Применяя индукцию, аналогичным рассуждением как в случае $r=1$ (см. [6]) доказывается, что функция $\varphi^{(l)}(x)$, $l=1,\dots,2r-1$, абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[c,d] \subset (-1,1)$. Воспользовавшись теоремой Лебега, при фиксированных y и x получаем, что существует конечная производная $\frac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}}\tau_y(f,x,\mu)$ – абсолютно непрерывная на каждом отрезке $[c,d] \subset (-1,1)$.

Утверждение 2) доказано в работе [6].

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть $\mu \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, $r \in \mathrm{N}$, $l \in \mathrm{N}$. Пусть функция $f(x)$ имеет на каждом отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$ абсолютно непрерывную $2l-1$ производную $\frac{d^{2l-1}}{dx^{2l-1}} f(x)$. Тогда для почти всех $x \in (-1,1)$ и всех $y_i \in (-1,1)$, $i = 1,2,\ldots,r$, справедливы равенства*

$$\tau^r_{y_1,\ldots,y_r}(D^l_{x,\mu,\mu} f, x, \mu) = D^l_{x,\mu,\mu} \tau^r_{y_1,\ldots,y_r}(f, x, \mu).$$

Доказательство. При $r = l = 1$ справедливость леммы следует из леммы 5.

Пусть $l \geqslant 2$, $r = 1$. Ясно, что $D^{l-1}_{x,\mu,\mu} f(x)$ имеет абсолютно непрерывную на каждом отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$ производную $\frac{d}{dx} D^{l-1}_{x,\mu,\mu} f(x)$. Поэтому из леммы 5 следует, что

$$\tau_{y_1}(D^l_{x,\mu,\mu} f, x, \mu) = D_{x,\mu,\mu} \tau_{y_1}(D^{l-1}_{x,\mu,\mu} f, x, \mu).$$

Применяя это равенство l раз получим, что

$$\tau_{y_1}(D^l_{x,\mu,\mu} f, x, \mu) = D^l_{x,\mu,\mu} \tau_{y_1}(f, x, \mu).$$

Значит, равенство леммы справедливо при любых $l \in \mathrm{N}$ и $r = 1$.

Теперь, применяя индукцию, нетрудно доказать утверждение леммы при любых натуральных r и l.

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть даны числа p, r, α и μ такие, что $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r \in \mathrm{N}$, $\mu \in \mathrm{N} \cup \{0\}$,*

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} < \alpha - \frac{\mu}{2} \leqslant 0 && \text{при } p = 1,\\
&-\frac{1}{2p} < \alpha - \frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} && \text{при } 1 < p < \infty,\\
&0 \leqslant \alpha - \frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} && \text{при } p = \infty.
\end{aligned}$$

Пусть $f(x) \in AD^r(p,\alpha,\mu)$. Тогда для $0 \leqslant \delta < \pi$ справедливо неравенство

$$\widehat{\omega}_r(f,\delta,\mu)_{p,\alpha} \leqslant C \frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu r}} \delta^{2r} \|D^r_{x,\mu,\mu} f(x)\|_{p,\alpha},$$

где постоянная C не зависит от f и δ.

Доказательство. Докажем сначала, что при $|t_i| < \pi$ $(i = 1, \ldots, r)$ справедливо неравенство

$$\|\Delta^r_{t_1,\ldots,t_r}(f,x,\mu)\|_{p,\alpha} \leqslant C_1 \frac{1}{\prod_{i=1}^r (\cos t_i/2)^{2\mu}}\, t_1^2 \cdots t_r^2 \|D^r_{x,\mu,\mu} f(x)\|_{p,\alpha}, \tag{3}$$

где постоянная C_1 не зависит от f и t_i $(i = 1, \ldots, r)$.

Для $r = 1$ неравенство (3) доказано в работе [6].

Пусть $r \geqslant 2$. Предположим, что для $k < r$ справедливо неравенство

$$\|\Delta^k_{t_1,\ldots,t_k}(f,x,\mu)\|_{p,\alpha} \leqslant C_2 \frac{1}{\prod_{i=1}^k (\cos t_i/2)^{2\mu}}\, t_1^2 \cdots t_k^2 \|D^k_{x,\mu,\mu} f(x)\|_{p,\alpha},$$

Из условия $f \in AD^r(p,\alpha,\mu)$, применяя леммы 5 и 3, получаем, что

$$\Delta^k_{t_1,\ldots,t_k}(f,x,\mu) \in AD^{k+1}(p,\alpha,\mu).$$

Рассуждая как в работе [6], только взяв $\Delta^k_{t_1,\ldots,t_k}(f,x,\mu)$ вместо $f(x)$, имеем

$$\|\Delta^{k+1}_{t_1,\ldots,t_{k+1}}(f,x,\mu)\|_{p,\alpha} \leqslant C_3 \frac{1}{(\cos t_{k+1}/2)^{2\mu}}\, t_{k+1}^2 \|D_{x,\mu,\mu} \Delta^k_{t_1,\ldots,t_k}(f,x,\mu)\|_{p,\alpha}.$$

Применяя лемму 6 и предположение, получаем, что

$$\|\Delta^{k+1}_{t_1,\ldots,t_{k+1}}(f,x,\mu)\|_{p,\alpha} \leqslant C_4 \frac{1}{\prod_{i=1}^{k+1} (\cos t_i/2)^{2\mu}}\, t_1^2 \cdots t_{k+1}^2 \|D^{k+1}_{x,\mu,\mu} f(x)\|_{p,\alpha}.$$

Отсюда на основании индукции, получаем, что неравенство (3) справедливо.

Переходя в (3) к точной верхней грани по всем t_i, $|t_i| \leqslant \delta$ $(i = 1, \ldots, r)$, получим неравенство леммы.

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть даны числа p, α и μ такие, что $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,*

$$\begin{array}{ll} -1 < \alpha \leqslant \mu & \text{при } p = 1, \\ -\dfrac{1}{p} < \alpha < \mu + 1 - \dfrac{1}{p} & \text{при } 1 < p < \infty, \\ 0 \leqslant \alpha < \mu + 1 & \text{при } p = \infty. \end{array}$$

Тогда если $f \in L_{p,\alpha}$, то $H(f,x,\mu) \in L_{p,\alpha}$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что при условиях леммы $f \in L_{1,\mu}$. Значит $H(f, x, \mu)$ существует.

Для $1 \leqslant p < \infty$ обозначим

$$I = \|H(f, x, \mu)\|_{p,\alpha}^p = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{p\alpha} |H(f, x, \mu)|^p \, dx.$$

Пусть $p = 1$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1 - x^2)^\alpha |H(f, x, \mu)| \, dx \\ &\leqslant \int_0^1 (1 - x^2)^\alpha \int_0^x (1 - y^2)^{-\mu-1} \int_y^1 (1 - z^2)^\mu \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| dz \, dy \, dx. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$I_1 \leqslant C_1 \int_0^1 (1 - x)^\alpha \int_0^x (1 - y)^{-\mu-1} \int_y^1 (1 - z)^\mu \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| dz \, dy \, dx.$$

Поменяв пределы интегрирования, учитывая, что $-1 < \alpha \leqslant \mu$, имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant C_1 \int_0^1 (1 - z)^\mu \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| \int_0^z (1 - y)^{-\mu-1} \int_y^1 (1 - x)^\alpha \, dx \, dy \, dz \\ &= \frac{C_1}{\alpha + 1} \int_0^1 (1 - z)^\mu \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| \int_0^z (1 - y)^{\alpha-\mu} \, dy \, dz \\ &\leqslant C_2 \int_0^1 (1 - z)^\alpha z \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| \leqslant C_2 \left\| f - \frac{c_1}{c_0} \right\|_{1,\alpha}. \end{aligned}$$

Поскольку $f \in L_{1,\alpha}$ и $\alpha > -1$, то

$$I_1 < \infty.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-1}^0 (1 - x^2)^\alpha |H(f, x, \mu)| \, dx \\ &= \int_{-1}^0 (1 - x^2)^\alpha \left| \int_0^x (1 - y^2)^{-\mu-1} \int_y^1 (1 - z^2)^\mu \left(f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right) dz \, dy \right| dx. \end{aligned}$$

Из определения c_1 и c_0 следует, что

$$\int_{-1}^1 (1 - z^2)^\mu \left(f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right) dz = 0.$$

Поэтому

$$\int_y^1 (1-z^2)^\mu \left(f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right) dz = -\int_{-1}^y (1-z^2)^\mu \left(f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right) dz. \tag{4}$$

Отсюда вытекает, что

$$I_2 \leqslant C_3 \int_{-1}^0 (1+x)^\alpha \int_x^0 (1+y)^{-\mu-1} \int_{-1}^y (1+z)^\mu \left|f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right| dz\,dy\,dx.$$

Меняя пределы интегрирования, получаем

$$I_2 \leqslant C_3 \int_{-1}^0 (1+z)^\mu \left|f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right| \int_z^0 (1+y)^{-\mu-1} \int_{-1}^y (1+x)^\alpha\,dx\,dy\,dz.$$

Отсюда, аналогичным рассуждением как в предыдущем случае получаем, что

$$I_2 < \infty.$$

Таким образом, при $p=1$ доказано, что

$$I = I_1 + I_2 < \infty.$$

Значит, $H(f,x,\mu) \in L_{1,\alpha}$.

Пусть $1 < p < \infty$. Имеем

$$|H(f,x,\mu)| \leqslant \int_0^x (1-y^2)^{-\mu-1} \int_y^1 (1-z^2)^\mu \left|f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right| dz\,dy.$$

Рассмотрим

$$I_3 = \int_0^1 (1-x^2)^{p\alpha} |H(f,x,\mu)|^p\,dx.$$

Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1$. Выберем число γ такое, что

$$\max\left\{\alpha-\mu-1+\frac{1}{p}, -\mu-\frac{1}{p}\right\} < \gamma < \min\{0, \alpha-\mu\}.$$

Применяя к внешнему интегралу неравенство Гёльдера и учитывая, что $\gamma > -\mu - 1/p$, получаем

$$\begin{aligned} &|H(f,x,\mu)|^p \\ &\quad\leqslant C_4 \int_0^x (1-y)^{p\gamma} \left\{\int_y^1 (1-z)^\mu \left|f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right| dz\right\}^p dy \\ &\qquad\times \left\{\int_0^x (1-y)^{(-\mu-1-\gamma)\frac{p}{p-1}}\,dy\right\}^{p-1} \\ &\quad\leqslant C_5 (1-x)^{p(-\mu-\gamma)-1} \int_0^x (1-y)^{p\gamma} \left\{\int_y^1 (1-z)^\mu \left|f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right| dz\right\}^p dy. \end{aligned}$$

Применяя теперь неравенство Гёльдера к внутреннему интегралу, учитывая, что $\gamma > \alpha - \mu - 1 + 1/p$, находим, что

$$\begin{aligned}
&|H(f,x,\mu)|^p \\
&\quad\leqslant C_5(1-x)^{p(-\mu-\gamma)-1}\int_0^x(1-y)^{p\gamma} \\
&\qquad\times\int_y^1(1-z)^{p(\alpha-\gamma)}\left|f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right|^p dz\left\{\int_y^1(1-z)^{(\mu-\alpha+\gamma)\frac{p}{p-1}}\,dz\right\}^{p-1} dy \\
&\quad\leqslant C_6(1-x)^{p(-\mu-\gamma)-1}\int_0^x(1-y)^{p\gamma}\int_y^1(1-z)^{p(\alpha-\gamma)}\left|f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right|^p dz\,dy.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$I_3 \leqslant C_6\int_0^1(1-x)^{p(\alpha-\mu-\gamma)-1}\int_0^x(1-y)^{p\gamma}\int_y^1(1-z)^{p(\alpha-\gamma)}\left|f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right|^p dz\,dy\,dx.$$

Поменяв пределы интегрирования, учитывая, что $\gamma < \alpha - \mu$ и $\gamma < 0$, имеем

$$\begin{aligned}
I_3 &\leqslant C_6\int_0^1(1-z)^{p(\alpha-\gamma)}\left|f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right|^p\int_0^z(1-y)^{p\gamma} \\
&\qquad\times\int_y^1(1-x)^{p(\alpha-\mu-\gamma)-1}\,dx\,dy\,dz \\
&\leqslant C_7\int_0^1(1-z)^{p\alpha}z\left|f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right|^p dz \leqslant C_7\|f-\frac{c_1}{c_0}\|_{p,\alpha}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $f \in L_{p,\alpha}$ и $\alpha > -1/p$, имеем

$$I_3 < \infty.$$

Обозначим

$$I_4 = \int_{-1}^0(1-x^2)^{p\alpha}|H(f,x,\mu)|^p\,dx.$$

Учитывая равенство (4), имеем

$$H(f,x,\mu) = \int_0^x(1-y^2)^{-\mu-1}\int_{-1}^y(1-z^2)^{\mu}\left(f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right)dz\,dy.$$

Отсюда, при $-1 \leqslant x \leqslant 0$ имеем

$$|H(f,x,\mu)| \leqslant C_8\int_x^0(1+y)^{-\mu-1}\int_{-1}^y(1+z)^{\mu}\left|f(z)-\frac{c_1}{c_0}\right|dz\,dy.$$

Рассуждая как и при оценке I_3, а именно, применяя дважды неравенство Гёльдера, потом меняя пределы интегрирования, получим, что

$$I_4 < \infty.$$

Теперь

$$I = \|H(f,x,\mu)\|_{p,\alpha}^p = I_3 + I_4 < \infty.$$

Таким образом, при $1 \leqslant p < \infty$ $H(f,x,\mu) \in L_{p,\alpha}$.

Пусть $p = \infty$. Обозначим

$$J = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} (1-x^2)^\alpha |H(f,x,\mu)|.$$

Пусть

$$J_1 = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} (1-x^2)^\alpha |H(f,x,\mu)|.$$

Тогда

$$J_1 \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} (1-x^2)^\alpha \int_0^x (1-y^2)^{-\mu-1} \int_y^1 (1-z^2)^\mu \left| f(z) - \frac{c_1}{c_0} \right| dz\,dy$$
$$\leqslant \left\| f - \frac{c_1}{c_0} \right\|_{\infty,\alpha} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} (1-x^2)^\alpha \int_0^x (1-y^2)^{-\mu-1} \int_y^1 (1-z^2)^{\mu-\alpha}\,dz\,dy.$$

Учитывая, что $f \in L_{\infty,\alpha}$, имеем

$$J_1 \leqslant C_{11} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} (1-x)^\alpha \int_0^x (1-y)^{-\mu-1} \int_y^1 (1-z)^{\mu-\alpha}\,dz\,dy.$$

Отсюда, при $0 \leqslant \alpha < \mu + 1$, находим

$$J_1 \leqslant C_{12} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} (1-x)^\alpha \int_0^x (1-y)^{-\alpha}\,dy < \infty.$$

Пусть

$$J_2 = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 0} (1-x^2)^\alpha |H(f,x,\mu)|.$$

Тогда по аналогии с оценкой для J_1, учитывая равенство (4), имеем

$$J_2 \leqslant \left\| f - \frac{c_1}{c_0} \right\|_{\infty,\alpha} \max_{-1 \leqslant x \leqslant 0} (1+x)^\alpha \int_x^0 (1+y)^{-\mu-1} \int_{-1}^y (1+z)^{\mu-\alpha}\,dz\,dy < \infty.$$

Таким образом, для $p = \infty$

$$J = \max\{J_1, J_2\} < \infty,$$

т.е. $H(f,x,\mu) \in L_{\infty,\alpha}$.

Лемма 8 полностью доказана.

Лемма 9. *Пусть $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $f \in L_{1,\mu}$. Тогда справедливы следующие равенства*

$$D^l_{x,\mu,\mu} H^r(f,x,\mu) = H^{r-l}(f,x,\mu) - \frac{c_{r-l+1}}{c_0} \quad (l = 1,\dots,r-1)$$

и

$$D^r_{x,\mu,\mu} H^r(f,x,\mu) = f(x) - \frac{c_1}{c_0}, \tag{5}$$

где $c_{r-l+1} = \int_{-1}^{1} (1-z^2)^\mu H^{r-l}(f,z,\mu)\,dz$.

Доказательство. Докажем сначала равенство (5). Для $r = 1$ имеем

$$D_{x,\mu,\mu} H(f,x,\mu) = f(x) - \frac{c_1}{c_0}.$$

Теперь, учитывая, что по лемме 8 $H^r(f,x,\mu) \in L_{1,\mu}$, для $r \geqslant 2$ равенство (5) доказывается по индукции.

Из доказанного равенства (5) следует, что для $l = 1,\dots,r-1$

$$D^l_{x,\mu,\mu} H^r(f,x,\mu) = D^l_{x,\mu,\mu} H^l(H^{r-l}(f,x,\mu),x,\mu) = H^{r-l}(f,x,\mu) - \frac{c_{r-l+1}}{c_0}.$$

Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Пусть даны числа p, α, μ и r такие, что $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mu \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $r \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} &-1 < \alpha \leqslant \mu && \text{при } p = 1,\\ &-\frac{1}{p} < \alpha < \mu + 1 - \frac{1}{p} && \text{при } 1 < p < \infty,\\ &0 \leqslant \alpha < \mu + 1 && \text{при } p = \infty. \end{aligned}$$

Тогда если $f \in L_{p,\alpha}$, то $H^r(f,x,\mu) \in AD^r(p,\alpha,\mu)$.

Доказательство. По лемме 8 имеем, что $H^r(f,x,\mu) \in L_{p,\alpha}$. Из условий леммы следует, что $f \in L_{1,\mu}$ и $H^r(f,x,\mu) \in L_{1,\mu}$. Следовательно, постоянные c_r $(r = 1,2,\dots)$ в определении $H^r(f,x,\mu)$ определены.

Рассмотрим сначала случай $r = 1$. По определению $H(f,x,\mu)$ ясно, что $\frac{d}{dx}H(f,x,\mu)$ – абсолютно непрерывная функция на каждом отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$. Далее, из леммы 9 вытекает, что

$$D_{x,\mu,\mu} H(f,x,\mu) = f(x) - \frac{c_1}{c_0},$$

и, значит, $D_{x,\mu,\mu} H(f,x,\mu) \in L_{p,\alpha}$. Из леммы 8 следует, что $H(f,x,\mu) \in L_{p,\alpha}$. Таким образом, $H(f,x,\mu) \in AD^1(p,\alpha,\mu)$.

Теперь, применяя формулу Лейбница, лемму 9 и индукцию, получаем справедливость леммы 10.

Лемма 11. *Пусть* $f \in L_{1,\mu}$, $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Тогда для любого* $\delta \in (0,\pi)$ *справедливы равенства*

$$H_\delta^r(f,x,\mu) = \frac{1}{(\kappa(\delta))^r}\Delta_\delta^r(H^r(f,x,\mu),x,\mu) + \frac{c_1}{c_0} \quad (r = 1,2,\ldots), \tag{6}$$

где $\Delta_\delta^r = \Delta_{\delta_1,\ldots,\delta_r}^r$, $\delta_i = \delta$, $i = 1,2,\ldots,r$,

$$\kappa(\delta) = \int_0^\delta (\sin v/2)^{-1}(\cos v/2)^{-4\mu-1}\int_0^v \sin u/2\,(\cos u/2)^{4\mu+1}\,du\,dv.$$

Доказательство. Докажем сначала равенство (6) для $r = 1$. По лемме 9 имеем

$$f(x) = D_{x,\mu,\mu}H(f,x,\mu) + \frac{c_1}{c_0}.$$

Поэтому

$$H_\delta(f,x,\mu) = \frac{1}{\kappa(\delta)}\int_0^\delta (\sin v/2)^{-1}(\cos v/2)^{-4\mu-1} \times \int_0^v \widehat{\tau}_u\left(D_{x,\mu,\mu}H(f,x,\mu) + \frac{c_1}{c_0},x,\mu\right)\sin u/2\,(\cos u/2)^{4\mu+1}\,du\,dv.$$

Поскольку из свойств оператора $\widehat{\tau}_u(f,x,\mu)$, отмеченных в лемме 2, следует, что

$$\widehat{\tau}_u\left(D_{x,\mu,\mu}H(f,x,\mu) + \frac{c_1}{c_0},x,\mu\right) = \widehat{\tau}_u(D_{x,\mu,\mu}H(f,x,\mu),x,\mu) + \frac{c_1}{c_0},$$

то

$$H_\delta(f,x,\mu) = \frac{1}{\kappa(\delta)}\int_0^\delta (\sin v/2)^{-1}(\cos v/2)^{-4\mu-1} \times \int_0^v \widehat{\tau}_u(D_{x,\mu,\mu}H(f,x,\mu),x,\mu)\sin u/2\,(\cos u/2)^{4\mu+1}\,du\,dv + \frac{c_1}{c_0}.$$

Учитывая, что функция $H(f,x,\mu)$ имеет абсолютно непрерывную на каждом отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$ производную $\frac{d}{dx}H(f,x,\mu)$, применяя лемму 4, получаем

$$H_\delta(f,x,\mu) = \frac{1}{\kappa(\delta)}\Delta_\delta(H(f,x,\mu),x,\mu) + \frac{c_1}{c_0}.$$

Теперь для любого натурального r справедливость равенства (6) доказывается по индукции, применяя леммы 9, 6 и 4.

Следствие. *Пусть* $f \in L_{1,\mu}$, $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Тогда для любого* $\delta \in (0,\pi)$ *справедливы равенства*

$$D^r_{x,\mu,\mu} H^r_\delta(f,x,\mu) = \frac{1}{(\kappa(\delta))^r}\,\Delta^r_\delta(f,x,\mu) \quad (r = 1,2,\ldots).$$

Доказательство. По лемме 11 имеем

$$H^r_\delta(f,x,\mu) = \frac{1}{(\kappa(\delta))^r}\,\Delta^r_\delta\big(H^r(f,x,\mu),x,\mu\big) + \frac{c_1}{c_0}\,.$$

Так как из леммы 10 вытекает, что $H^r(f,x,\mu) \in AD^r(p,\alpha,\mu)$, то по лемме 6 получаем, что

$$\begin{aligned} D^r_{x,\mu,\mu} H^r_\delta(f,x,\mu) &= \frac{1}{(\kappa(\delta))^r}\,D^r_{x,\mu,\mu}\,\Delta^r_\delta\big(H^r(f,x,\mu),x,\mu\big) \\ &= \frac{1}{(\kappa(\delta))^r}\,\Delta^r_\delta\big(D^r_{x,\mu,\mu} H^r(f,x,\mu),x,\mu\big). \end{aligned}$$

Применяя лемму 9, находим

$$D^r_{x,\mu,\mu} H^r_\delta(f,x,\mu) = \frac{1}{(\kappa(\delta))^r}\,\Delta^r_\delta\left(f - \frac{c_1}{c_0}, x, \mu\right) = \frac{1}{(\kappa(\delta))^r}\,\Delta^r_\delta(f,x,\mu).$$

Следствие доказано.

Лемма 12. *Пусть даны числа* p, μ, α, r *и* δ *такие, что* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \delta < \pi$,

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} < \alpha - \frac{\mu}{2} \leqslant 0 && \textit{при } p = 1,\\ &-\frac{1}{2p} < \alpha - \frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} && \textit{при } 1 < p < \infty,\\ &0 \leqslant \alpha - \frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} && \textit{при } p = \infty. \end{aligned}$$

Если $f \in L_{p,\alpha}$, *то* $H^r_\delta(f,x,\mu) \in AD^r(p,\alpha,\mu)$.

Доказательство. Так как, в условиях леммы имеем $f \in L_{1,\mu}$, то по лемме 11

$$H^r_\delta(f,x,\mu) = \frac{1}{(\kappa(\delta))^r}\,\Delta^r_\delta\big(H^r(f,x,\mu),x,\mu\big) + \frac{c_1}{c_0}\,.$$

По лемме 10 $H^r(f,x,\mu) \in AD^r(p,\alpha,\mu)$. Из леммы 5 следует, что $H^r_\delta(f,x,\mu)$ имеет абсолютно непрерывную на каждом отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$ производную

$\dfrac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}} H_\delta^r(f,x,\mu)$. Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и лемму 6, для $l = 1, \ldots, r$ имеем

$$D^l_{x,\mu,\mu} H^r_\delta(f,x,\mu) = \frac{1}{(\kappa(\delta))^r}\,\Delta^r_\delta\big(D^l_{x,\mu,\mu} H^r(f,x,\mu), x, \mu\big).$$

Из леммы 9 для $l = 1, \ldots, r$ имеем

$$D^l_{x,\mu,\mu} H^r_\delta(f,x,\mu) = \frac{1}{(\kappa(\delta))^r}\,\Delta^r_\delta\big(H^{r-l}(f,x,\mu), x, \mu\big).$$

Теперь, применяя лемму 3 при фиксированном δ, учитывая, что по лемме 8 $H^{r-l}(f,x,\mu) \in L_{p,\alpha}$, имеем $D^l_{x,\mu,\mu} H^r_\delta(f,x,\mu) \in L_{p,\alpha}$.

Следовательно, $H^r_\delta(f,x,\mu) \in AD^r(p,\alpha,\mu)$. Тем самым лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Пусть даны числа p, α, μ и r такие, что $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mu \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $r \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} < \alpha - \frac{\mu}{2} \leqslant 0 && \textit{при } p = 1,\\ &-\frac{1}{2p} < \alpha - \frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} && \textit{при } 1 < p < \infty,\\ &0 \leqslant \alpha - \frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} && \textit{при } p = \infty. \end{aligned}$$

Пусть $f \in AD^r(p,\alpha,\mu)$. Тогда справедливо неравенство

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leqslant C\,\frac{1}{n^{2r}}\,\|D^r_{x,\mu,\mu} f(x)\|_{p,\alpha},$$

где постоянная C не зависит от f и n.

Доказательство. Для $r = 1$ теорема доказана в работе [6].

Пусть $P_n(x)$ – алгебраический многочлен наилучшего приближения функции $D_{x,\mu,\mu} f(x)$ степени не выше, чем $n-1$. Ясно, что многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k^{(\mu,\mu)}(x).$$

Пусть

$$g(x) = f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{k(k+2\mu+1)} P_k^{(\mu,\mu)}(x).$$

Тогда по уже доказанному для $r = 1$ случаю теоремы имеем [7; с. 171]

$$\begin{aligned} E_n(g)_{p,\alpha} &\leqslant C_3 \frac{1}{n^2} \|D_{x,\mu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha} \\ &= C_3 \frac{1}{n^2} \left\| D_{x,\mu,\mu} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k^{(\mu,\mu)}(x) \right\|_{p,\alpha} \\ &= C_3 \frac{1}{n^2} E_n(D_{x,\mu,\mu} f)_{p,\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $f(x) - g(x)$ – алгебраический многочлен степени не выше чем $n - 1$, получаем

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leqslant E_n(f-g)_{p,\alpha} + E_n(g)_{p,\alpha} \leqslant C_3 \frac{1}{n^2} E_n(D_{x,\mu,\mu} f)_{p,\alpha}.$$

Теперь, применяя последнее неравенство r раз, получим

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leqslant C_4 \frac{1}{n^{2r}} E_n(D^r_{x,\mu,\mu} f)_{p,\alpha} \leqslant C_4 \frac{1}{n^{2r}} \|D^r_{x,\mu,\mu} f(x)\|_{p,\alpha}.$$

Лемма 13 доказана.

§4. Основные утверждения

Теорема 1. *Пусть даны числа p, α, μ и r такие, что $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{array}{ll} -\dfrac{1}{2} < \alpha - \dfrac{\mu}{2} \leqslant 0 & \text{при } p = 1, \\ -\dfrac{1}{2p} < \alpha - \dfrac{\mu}{2} < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2p} & \text{при } 1 < p < \infty, \\ 0 \leqslant \alpha - \dfrac{\mu}{2} < \dfrac{1}{2} & \text{при } p = \infty. \end{array}$$

Пусть $f \in L_{p,\alpha}$. Тогда при всех $\delta \in [0, \pi)$ имеют место неравенства

$$C_1 (\cos \delta/2)^{2\mu r(r-1)} K_r(f, \delta, \mu)_{p,\alpha} \leqslant \widehat{\omega}_r(f, \delta, \mu)_{p,\alpha} \leqslant C_2 \frac{1}{(\cos \delta/2)^{2\mu r}} K_r(f, \delta, \mu)_{p,\alpha},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и δ.

Доказательство. Для любой функции $g(x) \in AD^r(p,\alpha,\mu)$ имеем

$$\widehat{\omega}_r(f,\delta,\mu)_{p,\alpha} \leqslant \widehat{\omega}_r(f-g,\delta,\mu)_{p,\alpha} + \widehat{\omega}_r(g,\delta,\mu)_{p,\alpha}.$$

Применяя лемму 3, находим, что

$$\widehat{\omega}_r(f-g,\delta,\mu)_{p,\alpha} \leqslant C_3 \frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu r}} \|f-g\|_{p,\alpha}.$$

Далее, в силу леммы 7

$$\widehat{\omega}_r(g,\delta,\mu)_{p,\alpha} \leqslant C_4 \frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu r}} \delta^{2r} \|D^r_{x,\mu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha}.$$

Поэтому

$$\widehat{\omega}_r(f,\delta,\mu)_{p,\alpha} \leqslant C_5 \frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu r}} \left(\|f-g\|_{p,\alpha} + \delta^{2r}\|D^r_{x,\mu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha}\right).$$

Переходя в этом неравенстве к точной нижней грани по $g(x) \in AD^r(p,\alpha,\mu)$, получаем правое неравенство теоремы.

Для доказательства левого неравенства для данной функции $f \in L_{p,\alpha}$ рассмотрим функцию

$$g_\delta(x) = \left(1 - (1 - H^r_\delta)^r\right)(f,x),$$

где $1(f,x) = f(x)$.

Из леммы 12 следует, что $H^l_\delta(f,x,\mu) \in AD^l(p,\alpha,\mu)$ $(l \in \mathbb{N})$. Поскольку

$$1 - (1 - H^r_\delta)^r = \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (-1)^k H^{kr}_\delta,$$

то, учитывая, что $AD^{kr}(p,\alpha,\mu) \subseteq AD^r(p,\alpha,\mu)$ $(k = 1,\dots,r)$, получаем, что

$$g_\delta(x) \in AD^r(p,\alpha,\mu).$$

Оценим выражение

$$\|D^r_{x,\mu,\mu} g_\delta(x)\|_{p,\alpha}.$$

Для этого замечаем, что поскольку $H^{kr-l}_\delta(f,x,\mu)$ $(k = 2,\dots,r,\ l = 0,1,\dots,r-1)$ имеет на каждом отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$ абсолютно непрерывную $2r-1$ производную, то, применяя сначала теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, потом лемму 6, обобщенное неравенство Минковского и, наконец, лемму 3, получаем, что

$$\begin{aligned}
&\|D^r_{x,\mu,\mu} H^{kr}_\delta(f,x,\mu)\|_{p,\alpha} \\
&\quad\leqslant \frac{1}{\kappa(\delta)}\int_0^\delta (\sin v/2)^{-1}(\cos v/2)^{-4\mu-1} \\
&\qquad\times \int_0^v \|\widehat{\tau}_u(D^r_{x,\mu,\mu} H^{kr-1}_\delta(f,x,\mu),x,\mu)\|_{p,\alpha} \sin u/2\,(\cos u/2)^{4\mu+1}\,du\,dv \\
&\quad\leqslant C_6\,\frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu}}\,\|D^r_{x,\mu,\mu} H^{kr-1}_\delta(f,x,\mu)\|_{p,\alpha}.
\end{aligned}$$

Применяя это неравенство $(k-1)r$ раз, получим, что

$$\|D^r_{x,\mu,\mu} H^{kr}_\delta(f,x,\mu)\|_{p,\alpha} \leqslant C_7\,\frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu r(k-1)}}\,\|D^r_{x,\mu,\mu} H^{r}_\delta(f,x,\mu)\|_{p,\alpha}.$$

Так как $g_\delta(x)$ представляет собой сумму членов содержащих $H^{kr}_\delta(f,x,\mu)$ $(k=1,\dots,r)$, то по последнему неравенству находим

$$\|D^r_{x,\mu,\mu} g_\delta(x)\|_{p,\alpha} \leqslant C_8\,\frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu r(r-1)}}\|\,D^r_{x,\mu,\mu} H^{r}_\delta(f,x,\mu)\|_{p,\alpha}.$$

Применяя следствие из леммы 11, получаем

$$\|D^r_{x,\mu,\mu} g_\delta(x)\|_{p,\alpha} \leqslant C_8\,\frac{1}{(\kappa(\delta))^r(\cos\delta/2)^{2\mu r(r-1)}}\,\|\Delta^r_\delta(f,x,\mu)\|_{p,\alpha}.$$

Легко оценить, что при $0<\delta\leqslant\pi/2$

$$\kappa(\delta)\geqslant C_9\,\delta^2.$$

Отсюда следует, что при $0<\delta\leqslant\pi/2$

$$\delta^{2r}\|D^r_{x,\mu,\mu} g_\delta(x)\|_{p,\alpha} \leqslant C_{10}\,\frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu r(r-1)}}\,\widehat{\omega}_r(f,\delta,\mu)_{p,\alpha}. \tag{7}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\|f(x)-g_\delta(x)\|_{p,\alpha} &= \|f(x)-(1-(1-H^r_\delta)^r)(f,x)\|_{p,\alpha} \\
&= \|(1-H^r_\delta)^r(f,x)\|_{p,\alpha}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что

$$1-H^r_\delta = (1-H_\delta)(1+H_\delta+H^2_\delta+\dots+H^{r-1}_\delta). \tag{9}$$

Теперь, применяя обобщенное неравенство Минковского и лемму 3, для $l = 1, \dots, r-1$ имеем

$$\begin{aligned}\|H_\delta^l(f,x,\mu)\|_{p,\alpha} &\leqslant \frac{1}{\kappa(\delta)} \int_0^\delta (\sin v/2)^{-1}(\cos v/2)^{-4\mu-1} \\ &\quad \times \int_0^v \|\widehat{\tau}_u(H_\delta^{l-1}(f,x,\mu),x,\mu)\|_{p,\alpha} \sin u/2\,(\cos u/2)^{4\mu+1}\,du\,dv \\ &\leqslant C_{11} \frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu}} \|H_\delta^{l-1}(f,x,\mu)\|_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

Применяя это неравенство l раз, получаем, что

$$\|H_\delta^l(f,x,\mu)\|_{p,\alpha} \leqslant C_{12} \frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu l}} \|f(x)\|_{p,\alpha}.$$

Поэтому из равенства (9), применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\begin{aligned}\|(1-H_\delta^r)(f,x)\|_{p,\alpha} &\leqslant C_{13} \frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu(r-1)}} \|(1-H_\delta)(f,x)\|_{p,\alpha} \\ &\leqslant C_{13} \frac{1}{\kappa(\delta)(\cos\delta/2)^{2\mu(r-1)}} \int_0^\delta (\sin v/2)^{-1}(\cos v/2)^{-4\mu-1} \\ &\quad \times \int_0^v \|\widehat{\tau}_u(f,x,\mu) - f(x)\|_{p,\alpha} \sin u/2\,(\cos u/2)^{4\mu+1}\,du\,dv \\ &\leqslant C_{14} \frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu(r-1)}} \sup_{0\leqslant u\leqslant\delta} \|\Delta_u(f,x,\mu)\|_{p,\alpha}.\end{aligned} \tag{10}$$

Применяя неравенство (10), из равенства (8) получим

$$\|f(x)-g_\delta(x)\|_{p,\alpha} \leqslant C_{14} \frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu(r-1)}} \sup_{0\leqslant t_1\leqslant\delta} \|\Delta_{t_1}((1-H_\delta^r)^{r-1}(f,x),x,\mu)\|_{p,\alpha}. \tag{11}$$

Замечаем, что меняя пределы интегрирования получаем

$$\widehat{\tau}_t\big(H_\delta(f,x,\mu),x,\mu\big) = H_\delta\big(\widehat{\tau}_t(f,x,\mu),x,\mu\big).$$

Применяя это равенство r раз получим

$$\widehat{\tau}_t\big(H_\delta^r(f,x,\mu),x,\mu\big) = H_\delta^r\big(\widehat{\tau}_t(f,x,\mu),x,\mu\big).$$

Отсюда очевидно, что

$$\Delta_t\big((1-H_\delta^r)(f,x),x,\mu\big) = (1-H_\delta^r)\big(\Delta_t(f,x,\mu),x\big).$$

Применяя сначала это равенство, затем неравенство (11), потом неравенство (10), получим, что

$$\|f(x)-g_\delta(x)\|_{p,\alpha} \leqslant C_{15}\,\frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu 2(r-1)}}$$
$$\times \sup_{0\leqslant t_1\leqslant\delta}\ \sup_{0\leqslant t_2\leqslant\delta} \|\Delta^2_{t_1,t_2}((1-H^r_\delta)^{r-2}(f,x),x,\mu)\|_{p,\alpha}.$$

Теперь, применяя $r-1$ раз эту процедуру, получим, что

$$\|f(x)-g_\delta(x)\|_{p,\alpha} \leqslant C_{16}\,\frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu r(r-1)}} \sup_{0\leqslant t_i\leqslant\delta,\ i=1,\dots,r} \|\Delta^r_{t_1,\dots,t_r}(f,x,\mu)\|_{p,\alpha}$$
$$\leqslant C_{16}\,\frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu r(r-1)}}\,\widehat{\omega}_r(f,\delta,\mu)_{p,\alpha}.$$

Таким образом, для $0<\delta\leqslant\pi/2$, из этого неравенства и неравенства (7) следует, что

$$I_\delta = \|f(x)-g_\delta(x)\|_{p,\alpha} + \delta^{2r}\|D^r_{x,\mu,\mu}g_\delta(x)\|_{p,\alpha}$$
$$\leqslant C_{17}\,\frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu r(r-1)}}\,\widehat{\omega}_r(f,\delta,\mu)_{p,\alpha}.$$

Тем самым доказано левое неравенство теоремы для $0<\delta\leqslant\pi/2$.

Поскольку для $\pi/2\leqslant\delta<\pi$ имеем $\delta^2<\pi^2\cdot 1$ и $1<\pi/2$, то

$$K_r(f,\delta,\mu)_{p,\alpha} \leqslant \pi^{2r}\big(\|f(x)-g_1(x)\|_{p,\alpha} + 1\cdot\|D^r_{x,\mu,\mu}g_1(x)\|_{p,\alpha}\big)$$
$$\leqslant C_{18}\,\widehat{\omega}_r(f,1,\mu)_{p,\alpha} \leqslant C_{18}\,\frac{1}{(\cos\delta/2)^{2\mu r(r-1)}}\,\widehat{\omega}_r(f,\delta,\mu)_{p,\alpha}.$$

Для $\delta=0$ левое неравенство теоремы тривиально.

Итак, для любого $\delta\in[0,\pi)$ доказано левое неравенство теоремы.

Теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть даны числа p, α, μ и r такие, что $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\mu\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $r\in\mathbb{N}$,*

$$-\frac{1}{2}<\alpha-\frac{\mu}{2}\leqslant 0 \qquad \textit{при } p=1,$$
$$-\frac{1}{2p}<\alpha-\frac{\mu}{2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{2p} \qquad \textit{при } 1<p<\infty,$$
$$0\leqslant\alpha-\frac{\mu}{2}<\frac{1}{2} \qquad \textit{при } p=\infty.$$

Пусть $f\in L_{p,\alpha}$. Тогда для любого натурального n справедливы неравенства

$$C_1E_n(f)_{p,\alpha} \leqslant \widehat{\omega}_r(f,1/n,\mu)_{p,\alpha} \leqslant C_2\frac{1}{n^{2r}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2r-1}E_\nu(f)_{p,\alpha},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и n.

Доказательство. Для любой функции $g(x) \in AD^r(p,\alpha,\mu)$, применяя лемму 13, имеем

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leqslant E_n(f-g)_{p,\alpha} + E_n(g)_{p,\alpha} \leqslant \|f-g\|_{p,\alpha} + C_3 \frac{1}{n^{2r}} \|D^r_{x,\mu,\mu} g(x)\|_{p,\alpha},$$

где постоянная C_3 не зависит от g и n. Отсюда, переходя к точной нижней грани по всем $g(x) \in AD^r(p,\alpha,\mu)$, получим

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leqslant C_4 K_r(f, 1/n, \mu)_{p,\alpha}.$$

Применяя теорему 1, получаем

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leqslant C_5 \left(\cos\frac{1}{2n}\right)^{-2\mu r(r-1)} \widehat{\omega}_r(f,1/n,\mu)_{p,\alpha} \leqslant C_6 \widehat{\omega}_r(f,1/n,\mu)_{p,\alpha}.$$

Левое неравенство теоремы доказано.

Докажем правое неравенство теоремы. Пусть $P_n(x)$ алгебраический многочлен наилучшего приближения для f, степени не выше, чем $n-1$. Пусть k выбрано так, что

$$2^k \leqslant n < 2^{k+1}.$$

Из теоремы 1, учитывая, что $P_{2^k}(x) \in AD^r(p,\alpha,\mu)$, следует, что

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}_r(f,1/n,\mu)_{p,\alpha} &\leqslant C_7 \left(\cos\frac{1}{2n}\right)^{-2\mu r} K_r(f,1/n,\mu)_{p,\alpha} \\ &\leqslant C_8 \left(E_{2^k}(f)_{p,\alpha} + \frac{1}{n^{2r}} \|D^r_{x,\mu,\mu} P_{2^k}(x)\|_{p,\alpha}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Так как

$$D^r_{x,\mu,\mu} P_{2^k}(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} D^r_{x,\mu,\mu}\big(P_{2^{\nu+1}}(x) - P_{2^\nu}(x)\big),$$

то, применяя r раз следствие из леммы 1, получаем

$$\begin{aligned}\|D^r_{x,\mu,\mu} P_{2^k}(x)\|_{p,\alpha} &\leqslant C_9 \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{2(\nu+1)r} \|P_{2^{\nu+1}} - P_{2^\nu}\|_{p,\alpha} \\ &\leqslant 2\,C_9 \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{2(\nu+1)r} E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

Поэтому, учитывая неравенство (12), имеем

$$\widehat{\omega}_r(f,1/n,\mu)_{p,\alpha} \leqslant C_{10} \frac{1}{n^{2r}} \sum_{\nu=0}^{k} 2^{2(\nu+1)r} E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha}.$$

Теперь, замечая, что для $\nu = 1, \dots, k$

$$\sum_{j=2^{\nu-1}}^{2^\nu - 1} j^{2r-1} E_j(f)_{p,\alpha} \geqslant 2^{2(\nu+1)r-4r} E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha},$$

находим

$$\widehat{\omega}_r(f, 1/n, \mu)_{p,\alpha} \leqslant C_{11}\, \frac{1}{n^{2r}} \left(2^{2r} E_1(f)_{p,\alpha} + \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{j=2^{\nu-1}}^{2^\nu - 1} j^{2r-1} E_j(f)_{p,\alpha} \right)$$

$$\leqslant C_{12} \frac{1}{n^{2r}} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2r-1} E_\nu(f)_{p,\alpha}.$$

Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] Pawelke S. Ein Satz von Jacksonschen Typ für algebraische Polynome // Acta Sci. Math. 1972. V. 33. №3–4. P. 323–336.

[2] Butzer P. L., Stens R. L., Wehrens M. Higher order of continuity based on the Jacobi translation operator and best approximation // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1980. V. 2. P. 83–87.

[3] Потапов М. К. О приближении алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Якоби // Вестник МГУ. Сер. матем. 1983. №4. С. 43–52.

[4] Потапов М. К., Федоров В. М. О теоремах Джексона для обобщенного модуля гладкости // Труды МИАН. 1985. Т. 172. С. 291–295.

[5] Потапов М. К. Некоторые неравенства для полиномов и их производных // Вестник МГУ. Сер. матем. 1960. №2. С. 10–20.

[6] Потапов М. К., Бериша Ф. М. О теореме Джексона для модуля гладкости, определяемого несимметричным оператором обобщенного сдвига // Вестник МГУ. Сер. матем. (в печати).

[7] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
University of Prishtina, Yugoslavia

Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. С. 221–237

Об устойчивости равномерной минимальности системы экспонент

А. М. Седлецкий

Дается ряд условий близости комплексных последовательностей (λ_n) и (μ_n), при выполнении которых соответствующие системы экспонент $(\exp(i\lambda_n t))$ и $(\exp(i\mu_n t))$ равномерно минимальны в $L^p(-\pi,\pi)$, $1 \leqslant p < \infty$, и $C[-\pi,\pi]$ одновременно.

Библиография: 17 названий.

1. Пусть $\lambda = (\lambda_n)$ и $\mu = (\mu_n)$ – две последовательности комплексных чисел, в которых индексы n принимают значения из множества $I \subseteq \mathbb{Z}$. Имеется значительное число работ, в которых исследуется вопрос об устойчивости полноты (минимальности) систем экспонент в пространствах L^p, т.е. вопрос об условиях близости последовательностей λ и μ, при которых порождаемые ими системы экспонент

$$e(\lambda) := (e^{i\lambda_n t}), \quad e(\mu) := (e^{i\mu_n t}) \qquad (n \in I) \tag{1}$$

полны (минимальны) в $L^p = L^p(-\pi,\pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, одновременно; для единообразия в формулировках теорем – и только в них – полагаем $L^\infty = C[-\pi,\pi]$. Сформулируем некоторые известные результаты.

Теорема А [1], [2]. *Если*

$$\sum_{n\in I} |\lambda_n - \mu_n| < +\infty, \tag{2}$$

то системы (1) *полны* (*минимальны*) *в* L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *одновременно.*

Теорема Б [3]. *Пусть последовательности* λ *и* μ *лежат в горизонтальной полосе, т.е.*

$$|\operatorname{Im}\lambda_n|, \quad |\operatorname{Im}\mu_n| \leqslant h < +\infty, \qquad n \in I, \tag{3}$$

и пусть

$$\operatorname{Re}\lambda_n = \operatorname{Re}\mu_n, \qquad n \in I. \tag{4}$$

Тогда системы (1) *полны* (*минимальны*) *в* L^2 *одновременно.*

Скажем, что последовательность λ *не сгущается*, если число точек λ_n в полосе $t < \operatorname{Re} z < t+1$ ограничено по $t \in \mathbb{R}$. В условии 2) теоремы В $\operatorname{Re}\lambda_{n+1} \geqslant \operatorname{Re}\lambda_n$, $\operatorname{Re}\mu_{n+1} \geqslant \operatorname{Re}\mu_n$.

Теорема В [4]. *Пусть последовательности* λ, μ *вещественны и не сгущаются. Пусть, далее, выполнено одно из условий*:

1) $(\lambda_n - \mu_n)_{n\in I} \in L^s$, $s < +\infty$,
2) $|\lambda_n - \mu_n| \leqslant \alpha_n$, $n \in \mathbb{Z}$, *где* $\alpha_n \downarrow 0$ *при* $n \to \pm\infty$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{\pm n}}{n} < +\infty.$$

Тогда системы (1) *полны* (*минимальны*) *в* L^2 *одновременно.*

Теорема Г [5]. *Пусть последовательности* λ, μ *вещественны и не сгущаются. Тогда если* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $p \neq 2$ *и*

$$(\lambda_n - \mu_n)_{n\in I} \in l^s, \qquad \frac{1}{s} = \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|, \tag{5}$$

то системы (1) *полны* (*минимальны*) *в* L^p *одновременно.*

Известно, что условие (3) в теореме Б, условие 2) в теореме В и условие (5) в теореме Г в определенном смысле ослабить нельзя (см. соответственно [6]–[8]). Кроме того, в [9] показано, что в теореме Г условие вещественности последовательностей λ, μ можно заменить условием (3).

Как видим, имеется ряд в определенном смысле неулучшаемых достаточных условий устойчивости полноты (минимальности) систем экспонент в L^p.

С другой стороны, автору неизвестны работы, в которых бы исследовался вопрос об устойчивости равномерной минимальности систем экспонент в L^p. А вопрос этот представляет несомненный интерес хотя бы потому, что равномерная минимальность системы элементов банахова пространства (наряду с полнотой и минимальностью) является необходимым условием базиса [10]. Но именно для системы экспонент имеется еще один существенный повод, чтобы интересоваться ее равномерной минимальностью. Повод этот дается следующей теоремой В. А. Ильина [11]. Пусть последовательность λ лежит в горизонтальной полосе и пусть система $e(\lambda)$ полна и минимальна в L^p, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда для того, чтобы для каждой функции $f \in L^p$ ее биортогональный ряд по системе $e(\lambda)$ равномерно на каждом отрезке, лежащем в $(-\pi, \pi)$, равносходился с тригонометрическим рядом Фурье функции f, необходимо и достаточно, чтобы система $e(\lambda)$ была равномерно минимальной (в оригинальной формулировке [11] присутствует еще одно условие, но, как показано в [12], его можно убрать).

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы показать, что условия теорем Б, В, Г, сохраняющие полноту и минимальность системы экспонент, сохраняют также и ее равномерную минимальность. Сформулируем полученные результаты, предварительно отметив, что отделимость последовательности λ (т.е. свойство $|\lambda_n - \mu_n| \geqslant \delta > 0$ при $n \neq m$) является необходимым условием равномерной минимальности системы $e(\lambda)$ в L^p. Далее, в теоремах 1–4 как точки λ_n, так и точки μ_n, попарно различны.

Теорема 1. *Пусть последовательности λ, μ отделимы, лежат в горизонтальной полосе и пусть выполнено условие* (4). *Тогда если одна из систем* (1) *полна и равномерно минимальна в L^2, то и другая тоже.*

Теорема 2. *Пусть последовательности λ, μ отделимы, лежат в горизонтальной полосе и пусть выполнено одно из условий* 1), 2) *теоремы* B. *Тогда если одна из систем* (1) *полна и равномерно минимальна в L^2, то и другая тоже.*

Теорема 3. *Пусть последовательности λ, μ отделимы, лежат в горизонтальной полосе и пусть выполнено условие* (5). *Тогда если одна из систем* (1) *полна и равномерно минималbна в L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $p \neq 2$, то и другая тоже.*

Теоремы 1–3 составляют основное содержание статьи. Кроме них мы докажем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (2). *Тогда если одна из систем* (1) *равномерно минимальна в L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то системы* (1) *эквивалентны в L^p в том смысле, что соответствие*

$$e^{i\lambda_n t} \longleftrightarrow e^{i\mu_n t}, \qquad n \in I,$$

продолжается до изоморфизма между линейными оболочками систем (1).

Заметим, что эквивалентность сохраняет равномерную минимальность и свойство быть базисом.

Напомним смысл терминов, которые встречались. Система (e_n) элементов банахова пространства B называется

а) *полной*, если $\overline{\operatorname{span}}(e_n) = B$,

б) *минимальной*, если $\operatorname{dist}\big(e_n, \overline{\operatorname{span}}(e_i)_{i\neq n}\big) > 0$ при всех n,

в) *равномерно минимальной*, если при всех n

$$\operatorname{dist}\big(e_n, \overline{\operatorname{span}}(e_i)_{i\neq n}\big) \geqslant \delta \cdot \|e_n\|, \qquad \delta > 0.$$

Минимальность системы (e_n) равносильна существованию системы сопряженных функционалов $(f_n) \in B^*$; это означает, что $(f_n, e_m) = 0$ при $n \neq m$ и $(f_n, e_n) = 1$. Систему (f_n) называют также *биортогональной системой* к системе (e_n).

Если система (e_n) минимальна и полна, то биортогональная система (f_n) единственна. В этом случае [10] равномерная минимальность системы (e_n) равносильна условию

$$\sup_n \|e_n\| \cdot \|f_n\| < +\infty. \tag{6}$$

2. Считая, что $0 \notin \lambda, \mu$, введем бесконечные произведения (БП)

$$F(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_n|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \qquad G(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\mu_n|<R} \left(1 - \frac{z}{\mu_n}\right), \tag{7}$$

и пусть

$$F_n(z) = \frac{F(z)}{z - \lambda_n}, \qquad G_n(z) = \frac{G(z)}{z - \mu_n}. \tag{8}$$

Через V обозначаем пространство функций с нормой

$$\|\sigma\|_V = |\sigma(0)| + \operatorname{var}\big(\sigma(t) : |t| \leqslant \pi\big).$$

Лемма 1. *Пусть система $e(\lambda)$ полна и минимальна в L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и пусть $0 \notin \lambda$. Тогда*

1) *существует предел*

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{|\lambda_n|<R} \frac{1}{\lambda_n}; \tag{9}$$

2) *БП $F(z)$ сходится во всей плоскости и определяет целую функцию (ЦФ) экспоненциального типа (ЭТ) π;*

3) *для биортогональной системы (f_n) в случае $p < \infty$ и (σ_n) в случае $p = \infty$ верны формулы*

$$\frac{1}{F'(\lambda_n)} F_n(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} f_n(t)\, dt, \qquad f_n \in L^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad n \in I, \tag{10}$$

$$\frac{1}{F'(\lambda_n)} F_n(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\, d\sigma_n(t), \qquad \sigma_n \in V, \quad n \in I, \tag{11}$$

Доказательство. Ограничимся случаем $p < \infty$. Тогда $f_n \in L^q$, причем L^∞ имеет обычный смысл, т.е. обозначает пространство измеримых ограниченных на $(-\pi, \pi)$ функций. При фиксированном m рассмотрим ЦФ

$$A_m(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} f_m(t)\, dt. \tag{12}$$

В силу биортогональности она обращается в 0 в точках λ_n, $n \neq m$. Других нулей у нее нет – иначе система $e(\lambda)$ была бы неполной в L^p. Далее, $\operatorname{supp} f_m = [-\pi, \pi]$, так как в противном случае система $e(\lambda)$ снова была бы неполной в L^p. Но тогда [13]

$$A_m(z) = c_m \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_n|<R,\, n\neq m} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right),$$

и существует предел (9), под знаком которого пропущен индекс $n \neq m$. Отсюда следуют утверждения 1), 2).

По построению функции $A_m(z)$ и $F_m(z)$ пропорциональны, т.е. $F(z)/(z-\lambda_m) = b_m A_m(z)$. Так как $F(\lambda_m) = 0$, а $A_m(\lambda_m) = 1$, то $b_m = F'(\lambda_m)$, и (12) показывает, что утверждение 3) верно. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (3), *пусть* $(\lambda_n - \mu_n) \in l^\infty$, *причем* $0 \notin \lambda, \mu$, *и пусть системы* (1) *полны и минимальны в* L^2. *Предположим, что*

1) *при некотором* $H > h$

$$|G(z)| \leqslant C \cdot |F(z)|, \qquad \operatorname{Im} z = H,$$

2) $|F'(\lambda_n)/G'(\mu_n)| \leqslant C < +\infty, \ n \in I.$

Тогда если система $e(\lambda)$ *равномерно минимальна в* L^2, *то и система* $e(\mu)$ *тоже.*

Доказательство. По лемме 1 $F(z)$ и $G(z)$ – ЦФЭТ π, и биортогональные системы (f_n) и (g_n) соответственно к системам $e(\lambda)$ и $e(\mu)$ имеют вид

$$f_n(t) = \frac{1}{F'(\lambda_n)}\widehat{F}_n(t), \qquad g_n(t) = \frac{1}{G'(\mu_n)}\widehat{G}_n(t), \tag{13}$$

где $\widehat{f}$ обозначает преобразование Фурье функции f.

Так как $\sup|\operatorname{Im}\lambda_n| < \infty$, то условие (6) равномерной минимальности для $e_n = \exp(i\lambda_n t)$ принимает вид

$$\sup\|f_n\| < \infty. \tag{14}$$

По условию и $\sup|\operatorname{Im}\mu_n| < \infty$; поэтому равномерная минимальность системы $e(\mu)$ в L^2 будет доказана, если мы проверим, что

$$\sup\|g_n\| < \infty. \tag{15}$$

Так как F_n и G_n – ЦФЭТ π, то

$$\|F_n(z)\|_{L^2(\mathbb{R}+iH)} \leqslant C\|F_n(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{16}$$

$$\|G_n(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C\|G_n(z)\|_{L^2(\mathbb{R}+iH)}, \tag{17}$$

где C от n не зависит.

Так как $(\lambda_n - \mu_n) \in l^\infty$, то из условия (3) следует, что $|z-\lambda_n| \leqslant C|z-\mu_n|, n \in I$, на прямой $\operatorname{Im} z = H$. Пользуясь этим, условиями 1), 2) леммы 2 и свойствами (16), (17), а также равенством Парсеваля, примененным к (13), находим

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\,\|g_n\|_2 &= \frac{1}{|G'(\mu_n)|}\,\|G_n(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{C}{|G'(\mu_n)|}\,\|G_n(z)\|_{L^2(\mathbb{R}+iH)}\\ &\leqslant \frac{C_1}{|G'(\mu_n)|}\left\|\frac{G(z)}{z-\lambda_n}\right\|_{L^2(\mathbb{R}+iH)} \leqslant \frac{C_2}{|F'(\lambda_n)|}\,\|F_n(z)\|_{L^2(\mathbb{R}+iH)}\\ &\leqslant \frac{C_3}{|F'(\lambda_n)|}\,\|F_n(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} = C_3\sqrt{2\pi}\,\|f_n\|_2,\end{aligned}$$

и в силу (14) условие (15) выполнено. Лемма 2 доказана.

Сейчас мы несколько видоизменим понятие сходимости БП и ряда в смысле главного значения, а именно, будем полагать

$$\prod a_n := \lim_{R\to\infty} \prod_{|\operatorname{Re} a_n|<R} a_n, \qquad \sum b_n := \lim_{R\to\infty} \sum_{|\operatorname{Re} b_n|<R} b_n. \tag{18}$$

Далее, при фиксированном m через $\prod'$ и $\sum'$ будем обозначать БП и ряды, в которых пропущен индекс $n = m$.

Так как в теоремах 1–3 последовательности λ, μ отделимы и лежат в горизонтальной полосе, то БП $F(z)$, $G(z)$ и ряд $\sum 1/\lambda_n$, сходящиеся в смысле (7) и (9), сходятся и в смысле (18). Итак,

$$F(z) = \prod\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \qquad G(z) = \prod\left(1 - \frac{z}{\mu_n}\right).$$

Отсюда следует, что при фиксированном m

$$F'(\lambda_m) = -\frac{1}{\lambda_m}\prod{}'\left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_n}\right), \qquad G'(\mu_m) = -\frac{1}{\mu_m}\prod{}'\left(1 - \frac{\mu_m}{\mu_n}\right). \tag{19}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть система $e(\lambda)$ полна и равномерно минимальна в L^2. По теореме Б система $e(\mu)$ полна и минимальна в L^2, и нам остается доказать ее равномерную минимальность. Достаточно проверить, что выполнены условия 1), 2) леммы 2, так как остальные ее условия очевидно выполнены (в разделе 5 будет показано, что предположение $0 \notin \lambda, \mu$ не снижает общности).

По условию (4) в прямоугольнике $|\operatorname{Re} z| \leqslant R$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant h$ содержится одинаковое число точек λ и μ. Поэтому из (19) следует, что

$$\frac{F'(\lambda_m)}{G'(\mu_m)} = \prod{}' \frac{\lambda_n - \lambda_m}{\mu_n - \mu_m}\cdot\frac{\mu_n}{\lambda_n} \quad \left(= \lim_{R\to\infty}\prod_{|\operatorname{Re}\mu_n|<R}{}'\right). \tag{20}$$

Покажем, что БП $\prod|\mu_n/\lambda_n|^2$ сходится. Для этого обозначим $\alpha_n = \operatorname{Re}\lambda_n = \operatorname{Re}\mu_n$, $\beta_n = \operatorname{Im}\lambda_n$, $\gamma_n = \operatorname{Im}\mu_n$. Имеем

$$\left|\frac{\mu_n}{\lambda_n}\right|^2 = \frac{\alpha_n^2 + \gamma_n^2}{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = 1 + \frac{\gamma_n^2 - \beta_n^2}{\alpha_n^2 + \beta_n^2} := 1 + \delta_n.$$

Из отделимости последовательности λ и из ее распределения в горизонтальной полосе вытекает, что $|\alpha_n| \geqslant c|n|$, $|n| > n_0$. Отсюда и из условия (3) следует сходимость ряда $\sum|\delta_n|$, а это влечет сходимость БП $\prod|\mu_n/\lambda_n|^2$.

Теперь, возвращаясь к (20), видим, что

$$\left|\frac{F'(\lambda_m)}{G'(\mu_m)}\right|^2 \leqslant C\prod{}'\left|\frac{\lambda_n - \lambda_m}{\mu_n - \mu_m}\right|^2. \tag{21}$$

Обозначим $\lambda_n^{\pm} = \alpha_n \pm ih$. Тогда

$$|\lambda_n - \lambda_m|^2 \leqslant |\lambda_n^+ - \lambda_n^-|^2 \leqslant (\alpha_n - \alpha_m)^2 + (2h)^2,$$
$$|\mu_n - \mu_m| \geqslant \max(\delta; |\alpha_n - \alpha_m|),$$

где $\delta = \inf(|\mu_n - \mu_m| : n \neq m)$. Поэтому

$$\left|\frac{\lambda_n - \lambda_m}{\mu_n - \mu_m}\right|^2 \leqslant 1 + \frac{4h^2}{\max(\delta^2; (\alpha_n - \alpha_m)^2)} := 1 + 4h^2\varepsilon_n. \tag{22}$$

Пусть константа s ограничивает число точек α_n на отрезке $I_k := (x : k - 1/2 \leqslant x - \alpha_m \leqslant k + 1/2)$, $k \in \mathbb{Z}$; s конечно в силу отделимости λ и условия (3). Тогда

$$\sum \varepsilon_n \leqslant \sum_{\alpha_n \in I_0} \varepsilon_n + \sum_{|k| \geqslant 1} \sum_{\alpha_n \in I_k} \varepsilon_n \leqslant \frac{s}{\delta} + 2s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - 1/2)^2} = M < \infty,$$

где M от m не зависит.

Возвращаясь к (20) видим, что БП в правой части (21) мажорируется константой, не зависящей от m. Условие 2) леммы 2 выполнено.

Проверим условие 1). Используя сходимость БП $\prod |\mu_n/\lambda_n|^2$, имеем

$$\left|\frac{G(z)}{F(z)}\right|^2 = \prod \left|\frac{z - \mu_n}{z - \lambda_n}\right|^2 \cdot \left|\frac{\lambda_n}{\mu_n}\right|^2 = C \prod \left|\frac{z - \mu_n}{z - \lambda_n}\right|^2. \tag{23}$$

Пусть $\operatorname{Im} z = H > h$; тогда ($x = \operatorname{Re} z$)

$$\left|\frac{z - \mu_n}{z - \lambda_n}\right|^2 \leqslant \frac{(x - \alpha_n)^2 + (H + h)^2}{(x - \alpha_n)^2 + (H - h)^2} = 1 + \frac{c_1}{(x - \alpha_n)^2 + c^2}.$$

При фиксированном x обозначим через J_k отрезок $(\alpha : k - 1/2 \leqslant x - \alpha \leqslant k + 1/2)$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\sum_n \frac{1}{(x - \alpha_n)^2 + c^2} \leqslant \sum_{\alpha_n \in J_0} + \sum_{|k| \geqslant 1} \sum_{\alpha_n \in J_k} \leqslant \frac{s}{c^2} + 2s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - 1/2)^2} = M < \infty.$$

Следовательно, при $\operatorname{Im} z = H > h$ БП в правой части (23) мажорируется константой, не зависящей от $\operatorname{Re} z$, т.е. условие 1) леммы 2 также выполнено. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Так как последовательности λ, μ в теореме 1 равноправны, то проверив условие 1) леммы 2, мы фактически доказали, что если выполнены условия (3), (4) и последовательности λ, μ не сгущаются, то

$$|F(z)| \asymp |G(z)|, \qquad \operatorname{Im} z = H.$$

При этом в μ и λ допускаются повторяющиеся (т.е. кратные) точки; тогда если точка μ_n повторяется в последовательности μ s раз, то и соответствующий множитель $1 - z/\mu_n$ в БП (7) повторяется s раз.

3. При доказательстве теоремы 2 проверка условия 2) леммы 2 более затруднительна. Для этого понадобится

Лемма 3. *Пусть последовательность λ лежит в горизонтальной полосе и $0 \notin \lambda$. Предположим, что система $e(\lambda)$ полна и равномерно минимальна в L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда*

$$\sup_m \left| \lim_{R\to\infty} \sum_{|\operatorname{Re}\lambda_n|<R}' \frac{1}{\lambda_n - \lambda_m} \right| < \infty.$$

Доказательство. Пусть для определенности $p < \infty$. Сохраним за (f_n) обозначение биортогональной системы к системе $e(\lambda)$. Как мы видели в начале доказательства леммы 2, выполняется условие (14). Пусть $A_n(z)$ – последовательность ЦФЭТ, определенных посредством (12). Тогда $A_m(\lambda_m) = 1$, $A_m(\lambda_n) = 0$ при $m \neq n$, и других нулей у $A_m(z)$ нет. Рассмотрим функции $B_m(z) = A_m(z + \lambda_m)$. Тогда $B_m(0) = 1$, $(\lambda_n - \lambda_m)_{n\neq m}$ – все нули $B_m(z)$, и

$$B_m(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\bigl(e^{i\lambda_m t} f_m(t)\bigr)\,dt.$$

Отсюда, из условия (3) для λ и из условия (14) вытекает, что последовательность $B_m'(0)$ ограничена.

Так как $\operatorname{supp} f_m = [-\pi, \pi]$, $B_m(0) = 1$ и $(\lambda_n - \lambda_m)_{n\neq m}$ – последовательность всех нулей функции $B_m(z)$, то

$$B_m(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\operatorname{Re}(\lambda_n - \lambda_m)|<R}' \left(1 - \frac{z}{\lambda_n - \lambda_m}\right).$$

Значит,

$$\bigl(\log B_m(z)\bigr)'_{z=0} = B_m'(0) = -\lim_{R\to\infty} \sum_{|\operatorname{Re}(\lambda_n - \lambda_m)|<R}' \frac{1}{\lambda_n - \lambda_m}.$$

Отсюда и из ограниченности последовательности $B_m'(0)$ следует, что при всех m

$$\left| \lim_{R\to\infty} \sum_{|\operatorname{Re}(\lambda_n - \lambda_m)|<R}' \frac{1}{\lambda_n - \lambda_m} \right| \leqslant M < \infty. \tag{24}$$

При фиксированном m сравним суммы

$$\sum_{|\operatorname{Re}\lambda_n|<R}' \frac{1}{\lambda_n - \lambda_m}, \qquad \sum_{|\operatorname{Re}(\lambda_n - \lambda_m)|<R}' \frac{1}{\lambda_n - \lambda_m} \tag{25}$$

В силу отделимости λ и условия (3) эти суммы отличаются друг от друга слагаемыми, число которых ограничено константой, зависящей от m. Но модуль каждого такого слагаемого, очевидно, есть

$$\frac{1}{|\lambda_n - \lambda_m|} = O\Bigl(\frac{1}{R}\Bigr), \qquad R \to \infty.$$

Поэтому пределы сумм в (25) при $R \to \infty$ совпадают, и (24) дает утверждение леммы. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 2. Считая, что $\operatorname{Re}\lambda_n, \operatorname{Re}\lambda_m \neq 0$, рассмотрим последовательности $\operatorname{Re}\lambda := (\operatorname{Re}\lambda_n)$ и $\operatorname{Re}\mu := (\operatorname{Re}\mu_n)$. По теореме Б системы $e(\lambda)$ и $e(\operatorname{Re}\lambda)$ одновременно полны (минимальны) в L^2. Это же относится и к другой паре систем $e(\mu)$, $e(\operatorname{Re}\mu)$. (Надо иметь в виду, что в последовательностях $\operatorname{Re}\lambda$, $\operatorname{Re}\mu$ могут встретиться кратные точки; тогда точке α_j кратности m_j в системе $e(\operatorname{Re}\lambda)$ отвечают функции $t^s\exp(i\alpha_j t)$, $s = \overline{0, m_j - 1}$.)

Для последовательностей $\operatorname{Re}\lambda$ и $\operatorname{Re}\mu$ выполнено одно из условий 1), 2) теоремы 2. По теореме В системы $e(\operatorname{Re}\lambda)$, $e(\operatorname{Re}\mu)$ одновременно полны (минимальны) в L^2. Значит и системы $e(\lambda)$, $e(\mu)$ одновременно полны (минимальны) в L^2. Поэтому достаточно предположить, что система $e(\lambda)$ полна и равномерно минимальна в L^2, и доказать, что система $e(\mu)$ равномерно минимальна в L^2.

Наряду с функциями (7) рассмотрим функции

$$\Phi(z) = \prod\left(1 - \frac{z}{\operatorname{Re}\lambda_n}\right), \qquad \Psi(z) = \prod\left(1 - \frac{z}{\operatorname{Re}\mu_n}\right).$$

В [4] в ходе доказательства теоремы В установлено (лемма 2), что если для последовательностей $\operatorname{Re}\lambda$, $\operatorname{Re}\mu$ выполнено одно из условий 1), 2) теоремы 2, то

$$|\Phi(z)| \asymp |\Psi(z)|, \qquad \operatorname{Im} z = H > h. \tag{26}$$

Далее, по замечанию 1

$$|F(z)| \asymp |\Phi(z)|, \quad |G(z)| \asymp |\Psi(z)|, \qquad \operatorname{Im} z = H > h. \tag{27}$$

Объединяя (26) и (27), видим, что условие 1) леммы 2 выполнено.

Займемся проверкой условия 2) этой леммы. Сначала покажем, что

$$\sup_m \left| \lim_{R\to\infty} \sum_{|\operatorname{Re}\mu_n|<R}{}' \frac{1}{\mu_n - \mu_m} \right| < \infty. \tag{28}$$

Обозначим $\varepsilon_n = \lambda_n - \mu_n$; по условиям последовательность ε_n ограничена. Из отделимости последовательностей λ, μ следует, что

$$|\lambda_n - \lambda_m|, \; |\mu_n - \mu_m| \geqslant \delta|n - m|, \qquad \delta > 0. \tag{29}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{|\operatorname{Re}\lambda_n|<R}{}' \frac{1}{\lambda_n - \lambda_m} - \sum_{|\operatorname{Re}\mu_n|<R}{}' \frac{1}{\mu_n - \mu_m} \right| \\
&\quad = \left| O(1) + \sum_{|\operatorname{Re}\lambda_n|<R}{}' \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{(\lambda_n - \lambda_m)(\mu_n - \mu_m)} \right| \\
&\quad \leqslant c_1 + c \sum_{|\operatorname{Re}\lambda_n|<R}{}' \frac{1}{|\lambda_n - \lambda_m| \cdot |\mu_n - \mu_m|} \\
&\quad \leqslant c_1 + \frac{c}{\delta^2} \sum{}' \frac{1}{(n-m)^2} = c_1 + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = M < \infty,
\end{aligned}$$

и промежуточное утверждение (28) следует из леммы 3.

Пусть $\lambda(R)$ обозначает число точек λ_n в прямоугольнике $|\operatorname{Re} z| \leqslant R$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant h$. Из условий теоремы 2 следует, что $\lambda(R) - \mu(R) = O(1)$. И так как общий член в БП (19) стремится к 1 при $n \to \infty$, то из (19) и на этот раз вытекает формула (20).

Если выполнено одно из условий 1), 2) теоремы 2, то

$$\sum \frac{|\mu_n - \lambda_n|}{|\lambda_n|} < \infty. \tag{30}$$

Это следует из того, что последовательность λ имеет ненулевую плотность, и следовательно, $|\lambda_n| \sim C|n|$, $C \neq 0$, $n \to \pm\infty$; если речь идет об условии 1), то к этому надо добавить неравенство Гёльдера. Благодаря (30), БП

$$\prod \frac{\mu_n}{\lambda_n} = \prod \left(1 + \frac{\mu_n - \lambda_n}{\lambda_n}\right)$$

сходится. Значит, в силу (20), при фиксированном m

$$\begin{aligned}
\frac{F'(\lambda_m)}{G'(\mu_m)} &= C \prod{}' \frac{\lambda_n - \lambda_m}{\mu_n - \mu_m} = C \prod{}' \left(1 + \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{\mu_n - \mu_m}\right) \\
&= c \cdot \exp\left(\lim_{R\to\infty} \sum_{|\operatorname{Re}\mu_n|<R}{}' \log\left(1 + \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{\mu_n - \mu_m}\right)\right) \\
&= c \cdot \exp\left(\lim_{R\to\infty} \sum_{|\operatorname{Re}\mu_n|<R}{}' \left(\frac{\varepsilon_n}{\mu_n - \mu_m} - \frac{\varepsilon_m}{\mu_n - \mu_m} + O\left(\frac{1}{(n-m)^2}\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

где O равномерно по m. Отсюда, из ограниченности ε_n и из (28) мы получаем, что

$$\frac{F'(\lambda_m)}{G'(\mu_m)} \leqslant c \cdot \exp\left(\left|\lim_{R\to\infty} \sum_{|\operatorname{Re}\mu_n|<R}{}' \frac{\varepsilon_n}{\mu_n - \mu_m}\right|\right).$$

Значит, с учетом (29) достаточно убедиться в том, что

$$\sum{}' \left|\frac{\varepsilon_n}{n-m}\right| \leqslant M < \infty, \tag{31}$$

где M от m не зависит.

Если выполнено условие 1), то (31) следует из неравенства Гёльдера. Пусть выполнено условие 2). Тогда

$$\alpha_n = O\left(\frac{1}{\log|n|}\right), \qquad n \to \pm\infty. \tag{32}$$

Действительно, рассматривая для определенности $n > 0$, в силу монотонности α_n, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} = S > \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k} > c \cdot \alpha_n \log n.$$

Пусть для определенности $m > 0$. Тогда

$$\sum{}' \left| \frac{\varepsilon_n}{n-m} \right| = \sum_{n \geqslant 0}{}' + \sum_{n<0} := S_1 + S_2.$$

Ясно, что $S_2 < S$. Далее,

$$S_1 = \sum_{0 \leqslant n < m/2} + \sum_{m/2 \leqslant n < 2m} + \sum_{n \geqslant 2m} := \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 .$$

Учитывая, что $|\varepsilon_n| \leqslant \alpha_n$, имеем

$$\sum\nolimits_1 \leqslant \frac{m}{2} \cdot \frac{\alpha_1}{m/2} = \alpha_1,$$

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{n \geqslant 2m} \frac{\alpha_n}{n} \cdot \frac{1}{1 - m/n} \leqslant 2 \sum_{n \geqslant 2m} \frac{\alpha_n}{n} \leqslant 2S.$$

При оценке $\sum_2$ воспользуемся соотношением (32). Для удобства пишем $\alpha(n)$ вместо α_n. Тогда $\sum_2$ не превосходит

$$\alpha\Big(\frac{m}{2}\Big)\Big(\sum_{m/2 \leqslant n < m} \frac{1}{m-n} + \sum_{m<n<2m} \frac{1}{n-m} \Big) \leqslant c \cdot \alpha\Big(\frac{m}{2}\Big) \log m \leqslant M < \infty,$$

и условие 2) леммы 2 проверено. Теперь теорема 2 следует из леммы 2.

4. Доказательство теоремы 3. В силу теоремы Г, распространенной в [9] на случай (3), системы (1) одновременно полны и минимальны в L^p. Поэтому достаточно предположить, что система $e(\lambda)$ полна и равномерно минимальна в L^p, и доказать, что система $e(\mu)$ равномерно минимальна в L^p. Считаем, что $0 \notin \lambda, \mu$.

Пусть сначала $1 < p < \infty$. Пусть (f_n), (g_n) – биортогональные системы к системам $e(\lambda)$, $e(\mu)$; $f_n, g_n \in L^q$, $1/p + 1/q = 1$. По лемме 1 для функций f_n верна формула (10), и аналогичная формула

$$\frac{1}{G'(\mu_n)} G_n(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} g_n(t)\, dt, \qquad n \in I, \tag{33}$$

верна для функций g_n. Напомним, что функции F_n, G_n задаются посредством (8) и (7).

Так как система $e(\lambda)$ полна и равномерно минимальна в L^p, то верно свойство (14). Наша цель – доказать, что

$$\|g_n\| \leqslant C\, \|f_n\|, \qquad n \in I, \tag{34}$$

где C от n не зависит.

Обозначим через $H^p(a)$, $1 < p < \infty$, пространство Харди в полуплоскости $\operatorname{Im} z > a$, т.е. пространство функций, аналитических при $\operatorname{Im} z > a$, с нормой

$$\|f(z)\|_p = \sup_{y>a} \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p\, dx \Big)^{1/p}.$$

Справедлива

Лемма 4 [9]. *Пусть последовательности* λ *и* μ *отделимы и удовлетворяют условию* (3). *Тогда если* $(\lambda_n - \mu_n) \in l^s$, $1 < s < \infty$, *то функция*

$$S(z) = \sum_n \int_{\lambda_n}^{\mu_n} \frac{dt}{t-z}$$

принадлежит пространству $H^s(h+\varepsilon)$ *при любом* $\varepsilon > 0$, *причем*

$$\|S(z)\|_s \leqslant C\,\|(\lambda_n - \mu_n)\|_s, \qquad C = C(s, h, \varepsilon, \lambda, \mu).$$

(Попутно отметим опечатки в [9] на с. 18: в последней формуле левой колонки должно быть $\leqslant$ вместо $\times$, а в четвертой строке правой колонки должно быть L^r вместо L^p.)

Вернемся к рассмотрению ЦФ $F_n(z)$ и $G_n(z)$. Подразумевая главное значение логарифма, имеем

$$\int_{\lambda_n}^{\mu_n} \frac{dt}{t-z} = \log \frac{1 - z/\mu_n}{1 - z/\lambda_n} + \log \frac{\mu_n}{\lambda_n}. \tag{35}$$

Из условия $(\lambda_n - \mu_n) \in l^s$ следует свойство (30), а значит, и сходимость ряда с общим членом $\log(\mu_n/\lambda_n)$. Поэтому суммируя (35) по $n \neq m$, получаем

$$\begin{aligned} S_m(z) &:= \sum{}' \int_{\lambda_n}^{\mu_n} \frac{dt}{t-z} \\ &= \sum{}' \log \frac{\mu_n}{\lambda_n} + \log\Bigl(\Bigl(\prod{}'\Bigl(1 - \frac{z}{\mu_n}\Bigr)\Bigr) \Big/ \Bigl(\prod{}'\Bigl(1 - \frac{z}{\lambda_n}\Bigr)\Bigr)\Bigr) \\ &= \sum{}' \log \frac{\mu_n}{\lambda_n} + \log \frac{G(z)/(\mu_m - z)}{F(z)/(\lambda_m - z)} \cdot \frac{\mu_m}{\lambda_m} = \log \frac{G_m(z)}{F_m(z)} + C_1, \end{aligned}$$

откуда

$$G_m(z) = c \cdot F_m(z) \exp\bigl(S_m(z)\bigr). \tag{36}$$

На следующем этапе мы уточним шаги доказательства теоремы Г [5], [9]. По лемме 4 функция $S_m(z) \in H^s(h + 1/2)$, и

$$\|S_m(z)\|_s \leqslant C\,\|(\lambda_n - \mu_n)\|_s = M < \infty, \tag{37}$$

где M от m не зависит, так как λ_n, $n \neq m$, и μ_n, $n \neq m$, – подпоследовательности последовательностей λ и μ. Применяя хорошо известные свойства H^p-функций [14], отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} &S_m(z) \to 0, \quad |z| \to \infty, \qquad \operatorname{Im} z \geqslant h+1, \\ &|S_m(z)| \leqslant M < \infty, \qquad \operatorname{Im} z \geqslant h+1, \end{aligned} \tag{38}$$

где M от m не зависит. На основании последнего свойства и (36) делаем вывод, что при $\operatorname{Im} z \geqslant h+1$

$$G_m(z) = cF_m(z)\bigl(1 + O(S_m(z))\bigr) := cF_m(z) + \Phi_m(z), \tag{39}$$

где величина O равномерна относительно m. Так как F_m, G_m – ЦФЭТ π, то Φ_m – ЦФЭТ $\leqslant \pi$.

Следующие два леммы доказаны в [5].

Лемма 5. *Если* $(\gamma_n) \in l^s$, *где* $1/s = 1/p - 1/2$, $1 < p < 2$, *то* (γ_n) - *мультипликатор класса* (L^p, L^2) *с нормой* $\leqslant C \|(\gamma_n)\|_s$.

Напомним, что последовательность (γ_n) называется *мультипликатором* класса (L^p, L^r) (класса (V, L^r)) с нормой A, если имеет место следующее свойство. Из того, что (c_n) есть последовательность коэффициентов Фурье (Фурье–Стилтьеса) функции $f \in L^p$ $(\sigma \in V)$, следует, что последовательность $(c_n\gamma_n)$ есть последовательность коэффициентов Фурье некоторой функции $g \in L^r$, причем $\|g\| \leqslant A\|f\|$ $(\|g\| \leqslant A\|\sigma\|)$.

Лемма 6. *Пусть* $\Phi(z)$ - *ЦФЭТ* $\leqslant \pi$ *и пусть* $\Phi(x + ih_1) \to 0$, $x \to \pm\infty$, *при некотором вещественном* $h_1 \neq 0$. *Тогда если при некотором* $h_2 \in \mathbb{R}$, $h_2 \neq h_1$,

$$\Phi(n + ih_2) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+ih_2)t}\varphi(t)\,dt, \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad \varphi \in L^1, \tag{40}$$

то при всех $z \in \mathbb{C}$

$$\Phi(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\varphi(t)\,dt.$$

Лемма 7. *Если* $(\gamma_n) \in l^s$, *где* $1/s = |1/p - 1/2|$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, *то* (γ_n) - *мультипликатор класса* (L^p, L^p) *с нормой* $\leqslant C\|(\gamma_n)\|_s$.

Действительно, при $1 < p < 2$ лемма 7 есть следствие леммы 5 и неравенства $\|f\|_p \leqslant C_p\|f\|_2$. Случай $2 < p < \infty$ следует из рассмотренного и из того факта, что классы мультипликаторов (L^p, L^p) и (L^q, L^q) совпадают, если $1/p + 1/q = 1$.

Продолжим доказательство теоремы. Подставим $z = n + i(h + 1)$ в равенство $\Phi_m(z) = F_m(z) \cdot O(S_m(z))$ (см. (39)). С учетом формулы (10) для всех $n \in \mathbb{Z}$ получим

$$\Phi_m(n+i(h+1)) = F'(\lambda_m)\cdot O\big(S_m(n+i(h+1))\big) \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\big(e^{-t(h+1)}f_m(t)\big)\,dt. \tag{41}$$

Из (37) следует, что $\big(S_m(n + i(h + 1))\big)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^s$ и

$$\big\|\big(S_m(n + i(h + 1))\big)_{n\in\mathbb{Z}}\big\|_s \leqslant M < \infty$$

(см., например, [5; с. 169]). Если $1 < q < \infty$, $q \neq 2$, то по лемме 7 последовательность

$$O\big(S_m(n + i(h + 1))\big), \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{42}$$

является мультипликатором класса (L^q, L^q) с ограниченной по m нормой. Поэтому (41) переписывается в виде

$$\Phi_m(n + i(h + 1)) = F'(\lambda_m) \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\big(e^{-t(h+1)}\varphi_m(t)\big)\,dt, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{43}$$

где
$$\|\varphi_m\|_q \leqslant C\,\|f_m\|_q. \tag{44}$$

Далее, (43) показывает, что для $\Phi = \Phi_m$ и для $h_2 = h_1 + 1$ условие (40) леммы 6 выполнено (с $\varphi = F'(\lambda_m)\varphi_m$). Из (10) следует ограниченность $|F_m(z)|$ на каждой горизонтали $\operatorname{Im} z = h_1$, что вместе с (38) дает другое условие $\Phi_m(x + ih_1) \to 0$, $x \to \pm\infty$ этой леммы. По лемме 6

$$\Phi_m(z) = F'(\lambda_m)\int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\varphi_m(t)\,dt, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Возвращаясь к (39), с учетом (10) получаем, что

$$\frac{1}{G'(\mu_m)}G_m(z) = \frac{F'(\lambda_m)}{G'(\mu_m)}\int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\big(f_m(t) + \varphi_m(t)\big)\,dt,$$

откуда
$$g_m(t) = \frac{F'(\lambda_m)}{G'(\mu_m)}\big(f_m(t) + \varphi_m(t)\big). \tag{45}$$

В процессе доказательства теоремы 2 мы установили, что если $(\lambda_n - \mu_n) \in l^s$, то $|F'(\lambda_n)/G'(\mu_n)| \leqslant M < \infty$. Благодаря этому, (45) и (44) дают требуемую оценку (34). Случай $1 < p < \infty, p \neq 2$ разобран.

Если $p = 1, \infty$, то $s = 2$, т.е. последовательность (42) лежит в l^2 и ее норма ограничена по m.

Пусть $p = 1$; тогда в (41) $f_m \in L^\infty$ (здесь и в определении мультипликатора L^∞ обозначает пространство измеримых, существенно ограниченных функций на $(-\pi, \pi)$). Так как последовательность $(\gamma_n) \in l^2$ есть мультипликатор класса (L^∞, L^∞) с нормой $\leqslant c\|(\gamma_n)\|_2$ (см., например, [15]), то в (43) $\varphi_m \in L^\infty$, и (44) выполняется с $q = \infty$. В результате оценка (34) следует из (45).

Пусть $p = \infty$, т.е. речь идет о пространстве $C[-\pi, \pi]$. Пусть (σ_n), (ν_n) $(\in V)$ – биортогональные системы к системам $e(\lambda)$, $e(\mu)$ соответственно. Теперь вместо формулы (10) применяется формула (11). Поэтому в (41) теперь $f_m(t)\,dt = d\sigma_m(t)$, где в силу (6)
$$\|\sigma_m\|_V \leqslant C < \infty. \tag{46}$$

Из равенства Парсеваля следует, что последовательность $(\gamma_n) \in l^2$ есть мультипликатор класса (V, L^2), а значит, и класса (V, L^1), с нормой $\leqslant C\|(\gamma_n)\|_2$. Поэтому теперь в (43) $\varphi_m \in L^1$ и
$$\|\varphi_m\|_1 \leqslant C\,\|\sigma_m\|_V. \tag{47}$$

Далее, так как мы используем формулу (11) вместо формулы (10), то теперь вместо (45) имеем
$$d\nu_m(t) = \frac{F'(\lambda_m)}{G'(\mu_m)}\big(d\sigma_m(t) + \varphi_m(t)\,dt\big). \tag{48}$$

Пусть $\tau_m(t)$ – неопределенный интеграл от $\varphi_m(t)$. Тогда

$$\varphi_m(t)\,dt = d\tau_m(t), \qquad \|\tau_m\|_V = \|\varphi_m\|_1,$$

и в силу (48), (47) и (46) мы получаем оценку $\|\nu_m\| \leqslant C < \infty$, доказывающую равномерную минимальность системы $e(\mu)$ в C. Теорема 3 доказана.

5. Следующая лемма не только применяется при доказательстве теоремы 4, но и оправдывает сделанные в доказательствах теорем 1–3 допущения о том, что $\operatorname{Re}\lambda_n, \operatorname{Re}\mu_n \neq 0$.

Лемма 8. *Пусть e_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, – элементы банахова пространства B. Тогда если обе системы*

$$(e_n)_{n\neq 0}, \qquad (e_n)_{n\neq 1}$$

минимальны, то они эквивалентны.

Доказательство. Обозначим через B_1, B_2, B_3 подпространства в B, натянутые соответственно на системы $(e_n)_{n\neq 0}$, $(e_n)_{n\neq 0,1}$ и вектор e_1. В силу минимальности первой из этих систем, B_1 есть прямая сумма B_2 и B_3. Значит, произвольный элемент $f \in B_1$ однозначно представим в виде $f = g + c_1e_1$, где $g \in B_2$, c_1 – скаляр, и $\|g\|, |c_1| \leqslant A \cdot \|f\|$. Зададим на B_1 линейный оператор $T\colon e_n \to e_n$, $n \geqslant 2$; $e_1 \to e_0$. Тогда $Tf = g + c_1e_0$ и $\|Tf\| \leqslant A(1 + \|e_0\|) \cdot \|f\|$. Значит, оператор T ограничен. Аналогично устанавливается ограниченность обратного оператора, и лемма 8 доказана.

Доказательство теоремы 4. Воспользуемся следующим фактом [16; с. 127]. Пусть (e_n) – минимальная система в банаховом пространстве B; пусть (f_n) – система сопряженных функционалов. Тогда если $h_n \in B$ и

$$\sum \|h_n - e_n\| \cdot \|f_n\| < 1, \tag{49}$$

то системы (e_n), (h_n) эквивалентны.

Пусть для определенности система $e^{i\lambda_n t} := e_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, равномерно минимальна в L^p. Из определения равномерной минимальности и из теоремы Хана–Банаха следует существование такой системы сопряженных функционалов (f_n), что выполнено условие (6), т.е.

$$D := \sup_n \|e_n\| \cdot \|f_n\| < \infty. \tag{50}$$

Далее, по условию (2) последовательность $(\lambda_n - \mu_n)$ ограничена, и потому для всех $t \in [-\pi, \pi]$ и $n \in \mathbb{Z}_+$

$$|e^{i(\mu_n - \lambda_n)t} - 1| \leqslant C|\mu_n - \lambda_n|, \tag{51}$$

где C – некоторая константа. Пользуясь условием (2), фиксируем m столь большим, чтобы

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |\lambda_n - \mu_n| < \frac{1}{2CD} \,. \tag{52}$$

Докажем, что системы

$$(e^{i\lambda_n t})_{n=0}^{\infty}, \quad (e^{i\lambda_n t})_{n=0}^{m} \cup (e^{i\mu_n t})_{n=m+1}^{\infty} \tag{53}$$

эквивалентны. Обозначим вторую систему (53) через (h_n). Тогда в силу (51)

$$\|h_n - e_n\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\lambda_n t}|^p \cdot |1 - e^{i(\mu_n - \lambda_n)t}|^p \, dt\right)^{1/p} \leqslant C|\lambda_n - \mu_n| \cdot \|e_n\|, \quad n \geqslant m+1,$$

причем результирующее неравенство верно и при $p = \infty$. Вместе с (50) и (52) это означает, что выполнено условие (49) цитированного результата из [16]. По нему системы (53) эквивалентны.

В частности, вторая система (53) минимальна. Заменим в ней $e_m = e^{i\lambda_m t}$ на $e^{i\mu_n t}$. Новая система останется минимальной в силу леммы Н. Левинсона (см. [2]), хотя можно сослаться и на теорему А. По лемме 8 полученная система эквивалентна системе $e(\lambda)$. Заменим в полученной системе $e_{m-1} = e^{i\lambda_{m-1} t}$ на $e^{i\mu_{m-1} t}$ и т. д. После $m + 1$ шагов с применением леммы 8 получим эквивалентность систем $e(\lambda)$ и $e(\mu)$. Теорема 4 доказана.

В теореме 4 содержится, в частности, следующая теорема из [17]. Пусть точки λ_n лежат в горизонтальной полосе и выполнено условие (2). Тогда если система $e(\lambda)$ образует базис в L^2, то и система $e(\mu)$ также образует базис в L^2.

Список литературы

[1] Alexander W. O., Redheffer R. The excess of sets of complex exponentials // Duke Math. J. 1967. V. 34. P. 59–72.
[2] Redheffer R. Completeness of sets of complex exponentials // Adv. Math. 1977. V. 24. P. 1–62.
[3] Elsner J. Zulässige Abänderungen von Exponentialsystemen im $L^p(-A, A)$ // Math. Z. 1971. V. 120. P. 211–220.
[4] Седлецкий А. М. Избытки систем показательных функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22. №6. С. 803–814.
[5] Седлецкий А. М. Избытки близких систем экспонент в L^p // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. №4. С. 164–175.
[6] Седлецкий А. М. О чисто мнимых возмущениях показателей λ_n в системе $\{e^{i\lambda_n t}\}$ // Сиб. матем. журн. 1985. Т. 26. №4. С. 151–158.
[7] Седлецкий А. М. Избытки систем экспоненциальных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. №1. С. 203–218.
[8] Седлецкий А. М. О целых функциях класса С. Н. Бернштейна, не являющихся преобразованиями Фурье–Стилтьеса // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №3. С. 367–380.

[9] Седлецкий А. М. Устойчивость классов финитных преобразований Фурье // Интегральные преобразования и спец. функции. Информационный бюллетень. Изд-во ВЦ РАН. 1997. Т. 1. №2. С. 17–19.

[10] Крейн С. Г. (Ред.) Функциональный анализ. М.: Наука, 1972.

[11] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности в L_p и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений по системе экспонент // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. №4. С. 789–793.

[12] Седлецкий А. М. Аппроксимативные свойства систем экспонент в $L^p(a, b)$ // Дифференц. уравн. 1995. Т. 31. №10. С. 1639–1645.

[13] Titchmarsh E. C. The zeros of certain integral functions // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1926. V. 25. P. 283–302.

[14] Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. М.: Мир, 1984.

[15] Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. М.: Мир, 1985.

[16] Мильман В. Д. Геометрическая теория пространств Банаха // УМН. 1970. Т. 25. №3. С. 113–174.

[17] Young R. On perturbing bases of complex exponentials in $L^2(-\pi, \pi)$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 53. P. 137–140.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `sedlet@beta.math.msu.su`

Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. С. 239–244

Принцип локализации Римана, оценка скорости сходимости

С. А. Теляковский

Получена оценка скорости сходимости в утверждении, известном как принцип локализации Римана для тригонометрических рядов. При этом исправлена неточность, допущенная при исследовании этой задачи в работе [1].

Библиография: 6 названий.

Оценке скорости сходимости в принципе локализации Римана для тригонометрических рядов посвящена работа Э. Хилле и Г. Клейна [1]. Однако, оценка в том виде, как она сформулирована в этой работе, не верна. В настоящей заметке исправляется неточность, допущенная в [1].

Пусть $f(x)$ – суммируемая функция периода 2π, $\|f\|_L$ – ее норма в L и

$$\omega(h,f)_L = \sup_{|t|\leqslant h} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|\, dx$$

– модуль непрерывности функции f в метрике L.

Следуя [1], введем обозначение

$$R(x,\delta,n,f) = S_n(x,f) - \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{\sin nt}{t}\, dt,$$

где $\delta \in (0,\pi]$ и $S_n(x,f)$ – частная сумма порядка n ряда Фурье функции f. Одним из вариантов формулировки принципа локализации Римана является утверждение, что при фиксированном δ для каждой функции $f \in L$ величины $R(x,\delta,n,f)$ стремятся к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно x.

Согласно теореме 2 из [1] для любой функции f, не эквивалентной константе, должна выполняться оценка

$$|R(x,\delta,n,f)| \leqslant K\,\frac{1}{\delta}\,(\|f\|_L + 1)\omega(n^{-1},f)_L, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00212) и программы “Ведущие научные школы” (проект № 96-15-96102).

где K – некоторая абсолютная постоянная. Условимся, что и в дальнейшем буквой K будут обозначаться абсолютные положительные постоянные, в разных случаях различные.

Оценка (1) приведена в монографии [2; с. 110].

Понятно, что оценки подобного типа должны быть инвариантны относительно умножения функции f на произвольное число, а оценка (1) таким свойством не обладает. Этот дефект оценки (1) отметил Г. Фройд в реферате на работу [1], см. [3].

Нетрудно убедиться, что без дополнительных предположений о функции f величину $R(x,\delta,n,f)$ вообще нельзя оценить через $\omega(n^{-1},f)_L$ с множителем, не зависящим от f. В самом деле, рассмотрим функции

$$f_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon \sin x \tag{2}$$

с положительными ε. Простой подсчет показывает, что

$$\omega(n^{-1}, f_\varepsilon)_L = 8\varepsilon \sin\frac{1}{2n}\,.$$

Поэтому из равенства

$$R(x,\delta,n,f_\varepsilon) = R(x,\delta,n,1) + \varepsilon R(x,\delta,n,\sin\,\cdot)$$

следует, что ни для какого K, не зависящего от ε, оценка

$$|R(x,\delta,n,f_\varepsilon)| \leqslant K\omega(n^{-1}, f_\varepsilon)_L$$

не может выполняться сразу для всех ε.

Теорема 1. *Пусть $f \in L$ и*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

– нулевой коэффициент Фурье функции f. Тогда справедлива оценка

$$|R(x,\delta,n,f)| \leqslant K\,\frac{1}{\delta}\left[\frac{|a_0|}{n} + \omega(n^{-1},f)_L\right], \tag{3}$$

где K – некоторая абсолютная постоянная.

Доказательство. В работе [1; лемма] доказано, что если функция $f \in L$, а функция $v(t)$ на $[0,\pi]$ непрерывна, убывает и неотрицательна, то

$$\left|\int_0^\pi f(t)v(t)\sin nt\,dt\right| \leqslant 2v(0)\left[\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_L + m\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_L\right], \tag{4}$$

где

$$m(h,f)_L = \sup_x \int_0^h |f(x+t)|\,dt, \qquad h \in (0,\pi].$$

Затем в [1] с помощью (4) установлено, что

$$|R(x,\delta,n,f)| \leqslant K\,\frac{1}{\delta}\left[\omega(n^{-1},f)_L + m(n^{-1},f)_L\right]. \tag{5}$$

Поэтому для доказательства теоремы остается оценить $m(n^{-1},f)_L$. Оценка этой величины, данная в [1; теорема 1], не верна. Ш. Изуми [4; теорема 1] предложил другое доказательство оценки для $m(h,f)_L$, но приведенное им неравенство

$$m(h,f)_L \leqslant K\omega(h,f)_L$$

для функций f, не эквивалентных константе, также не может выполняться, если K не зависит от f.

Ошибочность упомянутых оценок для $m(n^{-1},f)_L$ из [1] и [4] легко установить с помощью тех же функций (2).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда справедлива оценка*

$$m(h,f)_L \leqslant \frac{|a_0|}{2}h + K\omega(h,f)_L, \qquad h \in (0,\pi], \tag{6}$$

где K – некоторая абсолютная постоянная.

Доказательство. Наши рассуждения представляют собой некоторую модификацию рассуждений из [1].

Пусть N – наименьшее натуральное число такое, что

$$\frac{2\pi}{N} \leqslant h,$$

и T_N – тригонометрический полином порядка не выше N, имеющий тот же нулевой коэффициент, что и функция f, и приближающий f с оценкой

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - T_N(t)|\,dx \leqslant K\omega(N^{-1},f)_L. \tag{7}$$

Такими свойствами обладают многие классические средние ряда Фурье функции f, например (см. [5; с. 306]), средние Фавара.

Имеем

$$\int_0^h |f(x+t)|\,dt \leqslant \int_0^h |f(x+t) - T_N(x+t)|\,dt$$
$$+ \int_0^h \left|\frac{a_0}{2}\right| dt + \int_0^h \left|T_N(x+t) - \frac{a_0}{2}\right| dt$$
$$\leqslant \int_0^{2\pi} |f(t) - T_N(t)|\,dt + \frac{|a_0|}{2}h + \int_0^h \left|T_N(x+t) - \frac{a_0}{2}\right| dt. \quad (8)$$

Оценим последний интеграл из правой части (8). Для сокращения записи введем обозначение

$$T_N^*(t) = T_N(t) - \frac{a_0}{2}.$$

Пусть

$$F_{N-1}(u) = \frac{1 - \cos Nu}{\pi N(1 - \cos u)}$$

– ядро Фейера порядка $N - 1$ и

$$L_N(u) = 2F_{2N-1}(u) - F_{N-1}(u)$$

– ядро Валле Пуссена, являющееся полиномом порядка $2N - 1$. Так как порядок полинома T_N^* не превышает N, то

$$T_N^*(t) = \int_0^{2\pi} T_N^*(u) L_N(t-u)\,du. \quad (9)$$

Пусть точки $t_1, t_2, \ldots, t_{3N}$ расположены на периоде и расстояние между соседними точками этой последовательности равно

$$\frac{2\pi}{3N}.$$

Точку t_{3N} выберем позднее.

Согласно выбору точек t_i для любого тригонометрического полинома $S(t)$ порядка строго меньшего, чем $3N$, имеем (см. [6; с. 15 и 46])

$$\frac{2\pi}{3N} \sum_{i=1}^{3N} S(t_i) = \int_0^{2\pi} S(t)\,dt \quad (10)$$

и

$$\frac{1}{3N} \sum_{i=1}^{3N} |S(t_i)| \leqslant K \int_0^{2\pi} |S(t)|\,dt. \quad (11)$$

Согласно (9) и (10)

$$\begin{aligned} T_N^*(t) &= \frac{2\pi}{3N}\sum_{i=1}^{3N} T_N^*(t_i)L_N(t-t_i) \\ &= \frac{2\pi}{3N}\left[\sum_{i=1}^{3N-1}\Delta T_N^*(t_i)\sum_{j=1}^{i}L_N(t-t_j) + T_N^*(t_{3N})\sum_{j=1}^{3N}L_N(t-t_j)\right], \qquad (12) \end{aligned}$$

где $\Delta T_N^*(t_i) = T_N^*(t_i) - T_N^*(t_{i+1})$.

Так как среднее значение полинома T_N^* равно нулю, то этот полином обращается в нуль в некоторых точках. Выберем t_{3N} так, чтобы $T_N^*(t_{3N}) = 0$. Отметим, что здесь равенство нулю среднего значения полинома T_N^* использовано по существу. В [1] делалось предположение о равенстве нулю среднего значения функции и полинома T_N, но были неверно учтены необходимые при этом изменения в оценках.

Используя выбор точки t_{3N}, из (12) для произвольного отрезка E длины $\dfrac{2\pi}{3N}$ находим

$$\begin{aligned} \int_E |T_N^*(t)|\,dt &\leqslant \frac{1}{3N}\sum_{i=1}^{3N-1}|\Delta T_N^*(t_i)|\sum_{j=1}^{i}\int_E |L_N(t-t_j)|\,dt \\ &\leqslant \frac{1}{3N}\sum_{i=1}^{3N-1}|\Delta T_N^*(t_i)|\int_0^{2\pi}|L_N(t)|\,dt. \end{aligned}$$

Отсюда в силу ограниченности констант Лебега для сумм Валле Пуссена следует оценка

$$\int_E |T_N^*(t)|\,dt \leqslant \frac{K}{3N}\sum_{i=1}^{3N}|\Delta T_N^*(t_i)|.$$

Но $\Delta T_N^*(t_i) = T_N^*(t_i) - T_N^*(t_i + 2\pi/(3N))$, поэтому после применения к полиному

$$T_N^*(t) - T_N^*(t + 2\pi/(3N))$$

оценки (11) получим

$$\begin{aligned} \int_E |T_N^*(t)|\,dt &\leqslant K\int_0^{2\pi}\left|T_N^*(t) - T_N^*\left(t + \frac{2\pi}{3N}\right)\right|dt \\ &= K\int_0^{2\pi}\left|T_N(t) - T_N\left(t + \frac{2\pi}{3N}\right)\right|dt. \qquad (13) \end{aligned}$$

Так как для полинома T_N выполняется оценка (7), то из (13) следует, что

$$\int_E |T_N^*(t)|\,dt \leqslant K\omega\left(\frac{2\pi}{3N}, f\right)_L \leqslant K\omega(h, f)_L. \qquad (14)$$

Покажем, что

$$\sup_x \int_0^h |T_N^*(x+t)|\,dt \leqslant 6 \sup_E \int_E |T_N^*(t)|\,dt. \tag{15}$$

Действительно, согласно выбору числа N имеем $N \geqslant 2$ и

$$\frac{2\pi}{N-1} > h.$$

Поэтому

$$6 \cdot \frac{2\pi}{3N} = \frac{2\pi}{N-1}\left(2 - \frac{2}{N}\right) > h,$$

откуда следует (15).

Неравенство (15) вместе с (8), (7) и (14) приводит к оценке (6).

Теорема 2, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Заметим, что если бы вместо $R(x,\delta,n,f)$ мы рассматривали величину

$$Q(x,\delta,n,f) = S_n(x,f) - \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin t/2}\,dt, \quad \delta \in (0,\pi),$$

то с помощью точно таких же рассуждений получили бы, что и для $Q(x,\delta,n,f)$ справедлива оценка вида (3).

Список литературы

[1] Hille E., Klein G. Riemann's localization theorem for Fourier series // Duke Math. J. 1954. V. 21. P. 587–591.

[2] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

[3] Freud G. // Zentralblatt für Mathematik. 1956. V. 57. P. 53.

[4] Izumi Shin-ichi. Some trigonometrical series. XIV // Proc. Japan Acad. 1955. V. 31. P. 324–326.

[5] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.

[6] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. II. М.: Мир, 1965.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. С. 245–253

Пример M-множества, которое не является M_0-множеством, для системы Уолша

Н. Н. Холщевникова

В работе доказывается, что построенный И. И. Пятецким-Шапиро класс замкнутых M, но не M_0-множеств для тригонометрических рядов, дает аналогичный пример и для системы Уолша.

Библиография: 9 названий.

Обратимся сначала к тригонометрическому случаю. Д. Е. Меньшов в 1916 г. ([1], см. также [2; с. 804] или [3; с. 31]) построил пример совершенного множества меры нуль, которое является M-множеством. Для этого множества существует нетривиальный ряд Фурье–Стилтьеса, сходящийся вне него к нулю. Это означает, что M-множество Меньшова является еще и M_0-множеством. Вопрос о том, не является ли всякое M-множество также M_0-множеством, долгое время был открыт. В 1954 г. И. И. Пятецкий-Шапиро [4] построил пример M-множеств, которые не являются M_0-множествами. Дальнейшие результаты в этом направлении были получены Т. Кернером и Р. Кауфманом (см., например, [5; с. 250]).

С помощью множеств, построенных Пятецким-Шапиро, в работе доказывается существование M, но не M_0-множеств для системы Уолша.

Напомним определение функций Уолша в нумерации Пэли (см., например, [6; с. 17]):

$$w_n(x) = (-1)^{\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i x_i}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in [0, 1), \tag{1}$$

где $\{x_i\}$ – последовательность знаков двоичного разложения числа x $\Big($т.е. $x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i 2^{-i-1}$, где $x_i = 0$ или 1; будем также пользоваться обозначением $x = 0.x_0x_1x_2\ldots\Big)$, причем для двоично-рациональных x берется разложение с конечным числом единиц, а ε_i определены равенством $n = \sum\limits_{i=0}^{k} \varepsilon_i 2^i$, где $\varepsilon_i = 0$ или 1 $(i = 0, 1, \ldots, k)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00332).

Множество $E \subset [0,1)$ называется *M-множеством для системы Уолша*, если существует ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x)$$

сходящийся к нулю на $[0,1) \setminus E$, не все коэффициенты которого равны нулю.

Множество $E \subset [0,1)$ называется *U-множеством* или *множеством единственности*, если оно не является M-множеством.

Пусть F – функция ограниченной вариации, для определенности, непрерывная справа; μ_F – заряд или обобщенная мера Лебега–Стилтьеса, порожденная функцией F. Интеграл Лебега $\int_0^1 f(x)\,d\mu_F$ по обобщенной мере μ_F называется *интегралом Лебега–Стилтьеса* и обозначается также $\int_0^1 f(x)\,dF(x)$.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x)$ называется *рядом Фурье–Стилтьеса*, если

$$a_n = \int_0^1 w_n(x)\,dF(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Множество $E \subset [0,1)$ называется *M_0-множеством* или *M-множеством в узком смысле*, если существует ряд Фурье–Стилтьеса, сходящийся к нулю на $[0,1) \setminus E$, не все коэффициенты которого равны нулю.

Множество $E \subset [0,1)$ называется *U_0-множеством* или *U-множеством в широком смысле*, если оно не является M_0-множеством.

Очевидно, что всякое M_0-множество является M-множеством, а всякое U-множество является U_0-множеством.

Мы покажем, что построенный для тригонометрического случая Пятецким-Шапиро [4] класс M, но не M_0-множеств, является таким же примером для рядов Уолша и как бы “создан для этой системы”. Мы следуем схеме доказательства Пятецкого-Шапиро, которое в случае системы Уолша заметно упрощается.

Пусть $0 < \gamma < \frac{1}{2}$. Положим

$$E_\gamma = \left\{ x = 0\,.\,x_0 x_1 x_2 \cdots : \sum_{i=0}^{m-1} x_i \leqslant \gamma m,\ m = 1, 2, 3, \right\},$$

где x_i – знаки двоичного разложения числа x.

Множества E_γ совершенные.

Допустим, что E_γ является M_0-множеством. Тогда [7] найдется возрастающая функция $F(x)$, постоянная на смежных к E_γ интервалах, но не всюду на $[0,1)$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \text{где} \quad a_n = \int_0^1 w_n(x)\,dF(x).$$

Положим $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} w_{2^k}(x)$.

Для $x = 0.x_0x_1\ldots x_k\ldots$, в силу (1),

$$w_{2^k}(x) = (-1)^{x_k} \quad \text{и} \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{x_k}.$$

Отсюда следует, что на множестве E_γ

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\left(n - 2\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right) \geqslant 1 - 2\gamma = \alpha_\gamma > 0.$$

Тогда

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,dF(x) = \int_{E_\gamma} \varphi_n(x)\,dF(x) \geqslant \alpha_\gamma \cdot \mu_F(E_\gamma).$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,dF(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_{2^k} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Полученное противоречие доказывает, что E_γ не является M_0-множеством, т.е. является U-множеством в широком смысле.

Обозначим через $\mathbb{Q}_2$ множество двоично-рациональных чисел.

Пусть E – замкнутое подмножество $[0,1)$. Положим

$$E_\Lambda = \bigl\{x \in E \cap \mathbb{Q}_2 : \text{существует } \delta_x > 0,\ (x, x+\delta_x) \cap E = \varnothing\bigr\}.$$

Замкнутое множество E называется элементарным U-множеством, если

1) E является U-множеством;
2) существует последовательность функций $\{f_n\}$ такая, что

$$f_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} w_k(x),$$

где $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k^{(n)}| \leqslant C = \text{const}\ (n \in \mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_0^{(n)} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_k^{(n)} = 0\ (k \neq 0)$, и

$$f_n(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in E \setminus E_\Lambda, \qquad f_n(x-0) = 0 \quad \text{для} \quad x \in E_\Lambda.$$

В [8] для системы Уолша доказана следующая

Теорема А. *Всякое замкнутое U-множество представляется в виде объединения конечного или счетного числа элементарных U-множеств.*

Эта теорема является аналогом соответствующей теоремы Пятецкого-Шапиро [4] для тригонометрического случая.

Справедлива

Лемма 1. *Если E – элементарное U-множество и $E \subset [0, 1/2^m)$, $m \in \mathbb{N}$, то множество*

$$2^m E = \{y : y = 2^m x,\ x \in E\}$$

тоже является элементарным U-множеством.

Доказательство. Докажем сначала лемму для $m = 1$. Покажем, во-первых, что $2E$ является U-множеством. Пусть

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k(y) = 0 \quad \text{для} \quad y \in [0,1) \setminus 2E.$$

Положим $y = 2x$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k(2x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w_{2k}(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \setminus E.$$

Отсюда, в силу результата А. А. Шнейдера [9; с. 289], вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k w_{2k}(x)$ к нулю на $[0, \frac{1}{2})$ и, следовательно, сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k w_k(y)$ к нулю всюду на $[0, 1)$. Поэтому $a_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ и $2E$ является U-множеством.

Докажем теперь, что $2E$ – элементарное U-множество. Так как E – элементарное U-множество, то найдется последовательность функций

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} w_k(x),$$

удовлетворяющая условиям 2). Положим

$$\varphi_n(x) = f_n\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} w_k\left(\frac{x}{2}\right), \qquad x \in [0, 1).$$

Тогда

$$\varphi_n(x - 0) = 0 \quad \text{для} \quad x \in 2E_\Lambda = (2E)_\Lambda,$$
$$\varphi_n(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in 2(E \setminus E_\Lambda) = 2E \setminus (2E)_\Lambda.$$

Так как
$$w_{2k}\left(\frac{x}{2}\right) = w_k(x), \quad w_{2k+1}\left(\frac{x}{2}\right) = w_k(x) \quad \text{для} \quad x \in [0,1),$$
то
$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_{2k}^{(n)} + c_{2k+1}^{(n)}\right) w_k(x).$$

Отсюда видно, что $\varphi_n(x)$ удовлетворяет условиям 2) (для множества $2E$). Следовательно, $2E$ – элементарное U-множество.

Если $E \subset [0, 1/2^m)$, то, применяя m раз доказанное утверждение, получим, что $2^m E$ также является элементарным U-множеством.

Лемма доказана.

Пусть $x = 0.x_0x_1x_2\ldots$, $y = 0.y_0y_1y_2\ldots$ – двоичные разложения чисел x и y из $[0,1)$. Положим $z_i = x_i + y_i \pmod 2$, $i = 0,1,2,\ldots$. Через $x \dot{+} y$ обозначается число $z = 0.z_0z_1z_2\ldots$, если среди z_i бесконечное число нулей. В противном случае, т.е. если все z_i, начиная с некоторого номера, равны 1, сумма $x \dot{+} y$ не определена. Напомним, что для двоично-рациональных чисел берутся двоичные разложения с конечным числом единиц. Поэтому, если $\xi \in \mathbb{Q}_2$, то сумма $x \dot{+} \xi$ определена для любого $x \in [0,1)$.

Лемма 2. *Пусть E – элементарное U-множество, $\xi \in \mathbb{Q}_2$. Тогда множество*
$$E \dot{+} \xi = \{y : y = x \dot{+} \xi,\ x \in E\}$$
тоже является элементарным U-множеством.

Доказательство. Пусть
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k(y) = 0 \quad \text{для} \quad y \in [0,1) \setminus (E \dot{+} \xi).$$

Полагая $y = x \dot{+} \xi$, получим, что
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k(x \dot{+} \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k(\xi) w_k(x) \quad \text{для} \quad x \in [0,1) \setminus E.$$

Отсюда следует, что $a_k w_k(\xi) = \pm a_k = 0$ ($k = 0,1,2,\ldots$) и $E \dot{+} \xi$ – U-множество. Пусть $\{f_n\}$ – последовательность функций, удовлетворяющая условиям 2) для элементарного U-множества E. Тогда для последовательности функций $\{\varphi_n\}$, где
$$\varphi_n(x) = f_n(x \dot{+} \xi), \qquad x \in [0,1), \quad n \in \mathbb{N},$$
выполняются условия 2) для множества $E \dot{+} \xi$.

Лемма доказана.

Основной для дальнейшего доказательства является

Лемма 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ – фиксированный набор из нулей и единиц, содержащий l единиц, $0 \leqslant l \leqslant m$, $(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$ – всевозможные наборы из нулей и единиц, $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$. Тогда*

$$\sum_{s=0}^{m} p^{m-s} q^s \sum_{\sum_{i=0}^{m-1} x_i = s} (-1)^{\sum_{i=0}^{m-1} x_i \varepsilon_i} = (p-q)^l \tag{2}$$

(при $p = q = \frac{1}{2}$, $l = 0$ считаем правую часть формулы (2) равной 1).

Доказательство проведем индукцией по m и по l.

Для $m = k$ и $l = 0$ имеем

$$\sum_{s=0}^{k} p^{k-s} q^s \sum_{\sum_{i=0}^{k-1} x_i = s} (-1)^0 = \sum_{s=0}^{k} C_k^s p^{k-s} q^s = (p+q)^k = 1 = (p-q)^0,$$

т.е. формула справедлива. Допустим, что формула (2) доказана для $m = k - 1$ при всех $0 \leqslant l \leqslant k - 1$ и для $m = k$ и некоторого $0 \leqslant l - 1 \leqslant m - 1$. Докажем, что тогда (2) справедлива для $m = k$ и l. Пусть, для определенности, $\varepsilon_0 = 1$. Тогда сумма в левой части формулы (2) разбивается на две, соответствующие наборам с $x_0 = 0$ и с $x_0 = 1$,

$$\sum_{s=0}^{k} p^{k-s} q^s \sum_{\sum_{i=0}^{k-1} x_i = s} (-1)^{\sum_{i=0}^{k-1} x_i \varepsilon_i}$$

$$= \sum_{s=0}^{k-1} p^{k-s} q^s \sum_{\sum_{i=1}^{k-1} x_i = s} (-1)^{\sum_{i=1}^{k-1} x_i \varepsilon_i} - \sum_{s=1}^{k} p^{k-s} q^s \sum_{\sum_{i=1}^{k-1} x_i = s-1} (-1)^{\sum_{i=1}^{k-1} x_i \varepsilon_i}$$

$$= p \sum_{s=0}^{k-1} p^{k-1-s} q^s \sum_{\sum_{i=1}^{k-1} x_i = s} (-1)^{\sum_{i=1}^{k-1} x_i \varepsilon_i} - q \sum_{s=0}^{k-1} p^{k-1-s} q^s \sum_{\sum_{i=1}^{k-1} x_i = s} (-1)^{\sum_{i=1}^{k-1} x_i \varepsilon_i}$$

$$= p(p-q)^{l-1} - q(p-q)^{l-1} = (p-q)^l,$$

где последнее равенство получается в силу предположения о справедливости формулы (2) при $m = k - 1$ и $l - 1$. Следовательно, формула справедлива для $m = k$ и любого $0 \leqslant l \leqslant m$. В силу предположения индукции лемма доказана.

Доказательство того, что E_γ является M-множеством проведем от противного. Допустим, что E_γ является U-множеством. В силу теоремы Бэра о категории и теоремы А, найдется такой интервал (a, b), что $\varnothing \neq E_\gamma \cap (a, b)$ является элементарным U-множеством.

Пусть $\xi = 0 . \xi_0 \xi_1 \xi_2 \ldots \in E_\gamma \cap (a, b)$. Положим $\xi^m = 0 . \xi_0 \xi_1 \ldots \xi_{m-1}$, тогда $\xi^m \in E_\gamma$. Выберем m настолько большим, чтобы ξ^m и $\xi^m + 2^{-m-1}$ принадлежали (a, b) и зафиксируем m.

Рассмотрим множество

$$E = \{x = 0\,.\,\xi_0\xi_1\ldots\xi_{m-1}\delta_0\delta_1\delta_2\ldots : 0\,.\,\delta_0\delta_1\delta_2\ldots \in E_\gamma\}.$$

Тогда $E \subset E_\gamma \cap (a, b)$, значит (учтем еще, что $E_\Lambda = \varnothing$) E – элементарное U-множество. Очевидно, $E_\gamma = 2^m(E \dotplus \xi^m)$ и, в силу лемм 1 и 2, E_γ является элементарным U-множеством.

Пусть N – целое, $N \geqslant 0$, $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$. Мера μ_p^N определяется следующим образом:

$$\mu_p^N\left[\frac{1}{2^N}, 1\right) = 0, \qquad \mu_p^N\left(\left[\frac{a}{2^{N+n}}, \frac{a+1}{2^{N+n}}\right]\right) = p^{n-s}q^s,$$

где $\dfrac{a}{2^n} = 0\,.\,x_0\ldots x_{n-1}$ и $s = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i$.

В [4] доказано, что

$$\lim_{N\to\infty} \mu_p^N(E_\gamma) = 1 \quad \text{для любого } p,\ 0 < p < 1,$$

причем равномерно при $1 - \gamma' \leqslant p < 1$, где $\gamma' < \gamma$.

Вычислим преобразование Фурье–Стилтьеса для мер μ_p^N:

$$c_k(\mu_p^N) = \int_0^1 w_k(x)\, d\mu_p^N.$$

Обозначим $\mu_p^0 = \mu_p$ и $c_k = \int_0^1 w_k(x)\, d\mu$.

Каждое целое неотрицательное число j единственным образом представляется в виде $j = k \cdot 2^N + r$, где k и r – целые неотрицательные, $r < 2^N$. Имеем, учитывая (1),

$$\begin{aligned} c_{k\cdot 2^N + r}(\mu_p^N) &= \int_0^1 w_{k\cdot 2^N+r}(x)\, d\mu_p^N = \int_0^{1/2^N} w_{k\cdot 2^N+r}(x)\, d\mu_p^N \\ &= \int_0^{1/2^N} w_k(2^N x)\, d\mu_p^N = \int_0^1 w_k(t)\, d\mu_p = c_k. \end{aligned}$$

Для $k < 2^m$ выполняется равенство

$$c_k = \sum_{\nu=0}^{2^m-1} \int_{\nu/2^m}^{(\nu+1)/2^m} w_k(t)\, d\mu_p = \sum_{\nu=0}^{2^m-1} w_k\left(\frac{\nu}{2^m}\right) \mu_p\left[\frac{\nu}{2^m}, \frac{\nu+1}{2^m}\right).$$

Пусть $k = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \varepsilon_i 2^i$, $l = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \varepsilon_i$, $\dfrac{\nu}{2^m} = 0.x_0 x_1 \ldots x_{m-1}$, где $x_i = x_i(\nu) = 0$ или 1. Положим $s(\nu) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} x_i$. Тогда, ввиду леммы 3,

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{\nu=0}^{2^m-1} (-1)^{\sum_{i=0}^{m-1} x_i(\nu)\varepsilon_i} p^{m-s(\nu)} q^{s(\nu)} \\ &= \sum_{s=0}^{m} p^{m-s} q^s \sum_{\sum_{i=0}^{m-1} x_i = s} (-1)^{\sum_{i=0}^{m-1} x_i \varepsilon_i} = (p-q)^l. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$c_{k\cdot 2^N + r}(\mu_p^N) = (p-q)^l = (2p-1)^l.$$

Заметим, что для множества E_γ, множество $(E_\gamma)_\Lambda = \varnothing$, так как каждая точка из E_γ является предельной справа. Так как E_γ – элементарное U-множество, то найдется постоянная $C > 0$ и последовательность функций $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} w_k(x)$ такая, что $f_n(x) = 0, x \in E_\gamma$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k^{(n)}| \leqslant C$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 0\,(k \neq 0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_0^{(n)} = 1$.

Рассмотрим класс K функций $\Phi(z)$, аналитических в круге $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$, $|\Phi(z)| \leqslant C$ в этом круге и $|\Phi(\frac{1}{2})| \geqslant \frac{1}{2}$. Из компактности этого класса функций вытекает существование такого $\tau > 0$, что $\max\limits_{1-\gamma<p<1} |\Phi(p)| \geqslant \tau$ для всякой функции Φ класса K.

Пусть $0 < \gamma' < \gamma$. Выберем и зафиксируем значение N настолько большое, что

$$\mu_p^N(E_\gamma) \geqslant 1 - \frac{\tau}{2C}, \qquad 1 - \gamma' \leqslant p < 1.$$

Для зафиксированного значения N рассмотрим

$$\Phi_n(p) = \int_0^1 f_n(x)\, d\mu_p^N = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} c_k(\mu_p^N) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} (2p-1)^{l(k)}.$$

Положим $\Phi_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} (2z-1)^{l(k)}$. Функции $\Phi_n(z)$ аналитичны в круге $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ и не превосходят там C. При этом

$$\Phi_n\Big(\frac{1}{2}\Big) = a_0^{(n)} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

При $1 - \gamma' \leqslant p < 1$ имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_n(p)| &= \left| \int_0^1 f_n(x)\, d\mu_p^N \right| = \left| \int_{E_\gamma} f_n(x)\, d\mu_p^N + \int_{CE_\gamma} f_n(x)\, d\mu_p^N \right| \\ &= \left| \int_{CE_\gamma} f_n(x)\, d\mu_p^N \right| \leqslant C\mu_p^N(CE_\gamma) \leqslant \frac{\tau}{2}. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает, что предположение о том, что E_γ является U-множеством, неверно. Следовательно, E_γ – M-множество.

Список литературы

[1] Menchoff D. E. Sur l'unicite du developpment trigonometrique // C. R. Acad. Sci. Paris. 1916. V. 163. P. 433–436.

[2] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

[3] Меньшов Д. Е. Избранные труды. Математика. М.: Факториал, 1997.

[4] Пятецкий-Шапиро И. И. Дополнение к работе "К проблеме единственности разложения функций в тригонометрический ряд" // Ученые записки МГУ, 1954, вып. 165. Математика. Т. 7. С. 79–97.

[5] Kechris A. S., Louvear A. Desciptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.

[6] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

[7] Холщевникова Н. Н. О категории U-множеств для рядов по системе Уолша // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №5. С. 129–151.

[8] Холщевникова Н. Н. О структуре замкнутых множеств единственности для системы Уолша // Труды МИАН. 1997. Т. 219. С. 400–409.

[9] Шнейдер А. А. О единственности разложений по системе функций Уолша // Матем. сб. 1949. Т. 24 (66). С. 279–300.

Московский государственный
технологический университет "Станкин"

Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. С. 255–266

Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования

А. П. Хромов

В статье находятся простые достаточные условия на ядро интегрального оператора $\int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt$, обеспечивающие равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Библиография: 2 названия.

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt, \tag{1}$$

где ядро $A(x,t)$ непрерывно при $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$ и $A(x,t) \equiv 1$.

В [1] найдены формулы обращения интегральных операторов вида:

$$Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt,$$

ядра которых допускают разрывы первого рода на линиях $t = x$ и $t = 1-x$, которые могут быть использованы в спектральном анализе таких операторов. Оператор (1) является одним из простейших, ядра которых разрывны на линии $t = 1-x$. В настоящей статье установим, что при некоторых дополнительных условиях гладкости ядра $A(x,t)$ имеет место равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора (1) и в обычный тригонометрический ряд Фурье. Мы дадим два доказательства этого факта. Одно (оно требует большей гладкости $A(x,t)$) сводится к проверке выполнимости условий теоремы 5 из статьи [2] для оператора A^2. Второе доказательство идет по схеме рассуждений статьи [2] и содержит ряд трудных мест, связанных со сложной структурой резольвенты R_λ^0 простейшего оператора вида (1), когда $A(x,t) \equiv 1$. Следуя рассуждениям [2], можно предположить, что требования гладкости $A(x,t)$ в этом втором доказательстве уже ослабить нельзя. К сожалению, соответствующие контрпримеры построить не удалось.

Работа выполнена при финансовой поддерке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-00566).

1. Теорема 1. *Пусть функции*[1] A, A_x, A_{x^2}, A_t, A_{t^2}, A_{xt}, A_{xt^2}, A_{x^2t}, $A_{x^2t^2}$, A_{x^3}, $-A_{xt}(x,x)+A_{x^2}(1-x,1-x)$ *непрерывны и* $A_{x^s}(x,x)=\delta_{0,s}$ $(s=0,1)$, *где* $\delta_{i,j}$ *– символ Кронекера. Тогда существует последовательность номеров* $\{k_l\}$ *такая, что для всякой функции* $f(x)\in L[0,1]$ *и любого* $\delta\in(0,\frac{1}{2})$

$$\lim_{l\to\infty}\|S_{k_l}(f)-\sigma_l(f)\|_{C[\delta,1-\delta]}=0,$$

где $S_k(f)$ *и* $\sigma_k(f)$ *– частичные суммы рядов Фурье функции* $f(x)$ *по с.п.ф. оператора* A *и по обычной тригонометрической системе* (k *– число членов и нумерация с.п.ф. осуществляется в порядке возрастания модулей характеристических значений*).

Доказательство. Рассмотрим оператор A^2. Имеем

$$A^2f(x)=\int_0^1 A_2(x,t)f(t)\,dt,$$

где

$$A_2(x,t)=\int_0^{\min\{1-x,1-t\}} A(1-x,\tau)A(1-\tau,t)\,d\tau. \tag{2}$$

Из (2) прежде всего видно, что $A_2(x,t)$ непрерывна при всех x, t из $[0,1]$. Далее, дифференцируя (2) надлежащее число раз, будем иметь:

$$A_{2,x}(x,t)=-A(x,t)-\int_0^{1-x} A_x(1-x,\tau)A(1-\tau,t)\,d\tau, \qquad t\leqslant x,$$

$$A_{2,x}(x,t)=-\int_0^{1-t} A_x(1-x,\tau)A(1-\tau,t)\,d\tau, \qquad t\geqslant x,$$

$$A_{2,x^2}(x,t)=-A_x(x,t)+\int_0^{1-x} A_{x^2}(1-x,\tau)A(1-\tau,t)\,d\tau, \qquad t\leqslant x,$$

$$A_{2,x^2}(x,t)=\int_0^{1-t} A_{x^2}(1-x,\tau)A(1-\tau,t)\,d\tau, \qquad t\geqslant x,$$

$$A_{2,t}(x,t)=\int_0^{1-x} A(1-x,\tau)A_t(1-\tau,t)\,d\tau, \qquad t\leqslant x,$$

$$A_{2,t}(x,t)=-A(1-x,1-t)+\int_0^{1-t} A(1-x,\tau)A_t(1-\tau,t)\,d\tau, \qquad t\geqslant x,$$

$$A_{2,t^2}(x,t)=\int_0^{1-x} A(1-x,\tau)A_{t^2}(1-\tau,t)\,d\tau, \qquad t\leqslant x,$$

$$A_{2,t^2}(x,t)=A_t(1-x,1-t)+\int_0^{1-t} A(1-x,\tau)A_{t^2}(1-\tau,t)\,d\tau, \qquad t\geqslant x,$$

[1] $A_{x^st^j}=\dfrac{\partial^{s+j}}{\partial x^s\partial t^j}A(x,t)$ и дифференцирование по x означает дифференцирование по первому аргументу, дифференцирование по t – по второму аргументу.

$$A_{2,xt}(x,t) = -A_t(x,t) - \int_0^{1-x} A_x(1-x,\tau)A_t(1-\tau,t)\,d\tau, \qquad t \leqslant x,$$

$$A_{2,xt}(x,t) = A_x(1-x,1-t) - \int_0^{1-t} A_x(1-x,\tau)A_t(1-\tau,t)\,d\tau, \qquad t \geqslant x,$$

$$A_{2,x^2t}(x,t) = -A_{xt}(x,t) + \int_0^{1-x} A_{x^2}(1-x,\tau)A_t(1-\tau,t)\,d\tau, \qquad t \leqslant x,$$

$$A_{2,x^2t}(x,t) = -A_{x^2}(1-x,1-t) + \int_0^{1-t} A_{x^2}(1-x,\tau)A_t(1-\tau,t)\,d\tau, \qquad t \geqslant x,$$

$$A_{2,x^2t^2}(x,t) = -A_{xt^2}(x,t) + \int_0^{1-x} A_{x^2}(1-x,\tau)A_{t^2}(1-\tau,t)\,d\tau, \qquad t \leqslant x,$$

$$A_{2,x^2t^2}(x,t) = A_{x^2t}(1-x,1-t) + \int_0^{1-t} A_{x^2}(1-x,\tau)A_{t^2}(1-\tau,t)\,d\tau, \qquad t \geqslant x.$$

Из этих формул видно, что выполняются соотношения (12) из [2] для $A_2(x,t)$ при $n = 2$ и выполняется условие а) теоремы 2 из [2]. Так как

$$p_{0,0}(t) = p_{2,0}(t) = p_{0,2}(t) = p_{1,1}(t) = 0, \qquad p_{1,0}(t) = p_{0,1}(t) = 1,$$
$$p_{2,1}(t) = -A_{xt}(x,x) + A_{x^2}(1-x,1-x),$$

то выполняется и условие б) теоремы 2 из [2].

Покажем, что оператор A^2 обратим. В самом деле, пусть $A^2 f = 0$. Тогда

$$-Af(1-x) - \int_0^{1-x} A_x(1-x,t)Af(t)\,dt = 0.$$

Полагаем здесь $1 - x = \xi$. Тогда

$$-Af(\xi) - \int_0^{\xi} A_x(\xi,t)Af(t)\,dt = 0.$$

Значит, $Af(x) = 0$. Отсюда это же рассуждение приводит к $f(x) = 0$ почти всюду. Тем самым A^2 обратим.

Из существования непрерывной $A_{x^3}(x,t)$ вытекает выполнимость условия в) теоремы 5 из [2].

Теперь осталось проверить выполнимость условий регулярности Биркгофа для естественных (см. [2]) граничных условий для A^2. Здесь нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – линейно независимые аддитивные функционалы в линейном векторном пространстве L. Существуют x_1 и x_2 такие, что*

$$f_i(x_j) = \delta_{i,j} \qquad (i,j = 1,2).$$

Доказательство. Берем y_1 любым из L, лишь бы $|f_1(y_1)| + |f_2(y_1)| > 0$. Тогда существует y_2 такой, что

$$\det\big(f_i(y_j)\big)_{i,j=1}^2 \neq 0.$$

В самом деле, в противном случае

$$\begin{vmatrix} f_1(y_1) & f_2(y_1) \\ f_1(y) & f_2(y) \end{vmatrix} = 0$$

при всех $y \in L$. А это противоречит линейной независимости функционалов f_1 и f_2. Обозначим $B = \big(f_i(y_j)\big)_{i,j=1}^2$. По доказанному эта матрица неособая. Обозначим $\Gamma = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^2 = B^{-1}$. Тогда имеем

$$E = \Gamma B = \begin{pmatrix} \gamma_{11}f_1(y_1) + \gamma_{12}f_1(y_2) & \gamma_{11}f_2(y_1) + \gamma_{12}f_2(y_2) \\ \gamma_{21}f_1(y_1) + \gamma_{22}f_1(y_2) & \gamma_{21}f_2(y_1) + \gamma_{22}f_2(y_2) \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица. Положив

$$x_1 = \gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2, \qquad x_2 = \gamma_{21}y_1 + \gamma_{22}y_2,$$

получим требуемое. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть L – линейное векторное пространство, L_1 и L_2 – его подпространства вида*:

$$L_1 = \{x \in L \mid f_1(x) = f_2(x) = 0\}, \qquad L_2 = \{x \in L \mid g_1(x) = g_2(x) = 0\},$$

где $\{f_1, f_2\}$, $\{g_1, g_2\}$ – две системы линейно независимых аддитивных функционалов. Если $L_1 = L_2$, то существуют такие константы $\alpha_{i,j}$ $(i, j = 1, 2)$, что

$$g_1(x) = \alpha_{11}f_1(x) + \alpha_{12}f_2(x), \qquad g_2(x) = \alpha_{21}f_1(x) + \alpha_{22}f_2(x). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $x \in L$ и обозначим $f_1(x) = \alpha$, $f_2(x) = \beta$. Тогда имеем

$$f_1(x) = \alpha\cdot 1 = \alpha f_1(x_1) + \beta f_1(x_2), \qquad f_2(x) = \beta\cdot 1 = \alpha f_2(x_1) + \beta f_2(x_2).$$

Отсюда $f_1(y) = f_2(y) = 0$, где $y = x - \alpha x_1 - \beta x_2$. Значит, $y \in L_1$. Но $L_1 = L_2$. Поэтому $g_1(y) = g_2(y) = 0$, что дает нам (3), где $\alpha_{i,j} = g_i(x_j)$. Лемма доказана.

Продолжаем доказательство теоремы 1. В теореме 2 из [2] показано, что обратным для A^2 будет интегро-дифференциальный оператор, определенный на множестве всех функций, имеющих абсолютно непрерывную производную и удовлетворяющих граничным словиям 5 [2], которые были названы естественными. Сейчас мы получим другие краевые условия, определяющие это множество. Для этого рассмотрим задачу обращения оператора A^2. Пусть $y(x) = A^2 f(x)$. Тогда, прежде всего,

$$y(1) = 0. \tag{4}$$

Далее, имеем

$$Sy(x) = \int_0^x A(x,t)Af(t)\,dt,$$

где $Sy(x) = y(1-x)$. Дифференцируя, получим

$$DSy(x) = Af(x) + Nf(x) \qquad \left(D = \frac{d}{dx}\right),$$

где $Nf(x) = \int_0^x N(x,t)f(t)\,dt$ и $N(x,t) = A_x(x,t)$. Отсюда

$$(E+N)^{-1}DSy(x) = Af(x).$$

Значит,

$$(E+N)^{-1}DSy(x)_{|x=1} = 0, \tag{5}$$

$$(E+N)^{-1}DS(E+N)^{-1}DSy(x) = f(x). \tag{6}$$

Выражение слева в (6) есть интегро-дифференциальный оператор второго порядка, представляющий собой $(A^2)^{-1}y$, а (4) и (5) являются граничными условиями, задающими его область определения. По лемме 2 условия (4) и (5) эквивалентны естественным граничным условиям. Условия регулярности Биркгофа для (4) и (5) выполняются очевидным образом. Тем самым условия теоремы 5 из [2] для оператора A^2 выполнены. Теорема доказана.

2. Здесь мы методом статьи [2] усилим теорему 1. Оказывается, что достаточно лишь требовать непрерывность функций $A(x,t)$, $A_x(x,t)$, $A_t(x,t)$, $A_{xt}(x,t)$.

Обозначим через $R_\lambda^0 = (E - \lambda A_0)^{-1}A_0$ резольвенту Фредгольма простейшего оператора $\int_0^{1-x} f(t)\,dt$. Здесь E – единичный оператор и λ – спектральный параметр. Положим $y = R_\lambda^0 f$. Тогда

$$y(1) = 0 \tag{7}$$

и $y = A_0(\lambda y + f)$. Отсюда, дифференцируя, получим

$$y'(x) = -\lambda y(1-x) - f(1-x). \tag{8}$$

Меняем в (8) x на $1-x$. Получим

$$y'(1-x) = -\lambda y(x) - f(x) \tag{9}$$

Обозначим $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y(1-x)$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(1-x)$, $z(x) = \{y_1(x), y_2(x)\}^T$, $F(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}^T$ (T – знак транспонирования). Тогда (8) и (9) в матричном виде запишется так:

$$z'(x) = \lambda Bz(x) + BF(x) \tag{10}$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Условие (7) приводит к следующему граничному условию для $z(x)$:

$$Pz(0) + Qz(1) = 0, \tag{11}$$

где $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Лемма 3. *Имеет место формула:*

$$z(x) = (\exp \lambda Bx)\Delta^{-1}(\lambda)\Big(P\int_0^x (\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt \\ - Q(\exp \lambda B)\int_x^1 (\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt\Big), \tag{12}$$

где $\Delta(\lambda) = P + Q\exp\lambda B$.

Доказательство. Общее решение однородной системы $z'(x) = \lambda Bz(x)$ имеет вид: $z(x) = (\exp\lambda Bx)C$, где C – произвольный постоянный вектор размерности 2. Отсюда методом вариации произвольных постоянных получаем общее решение системы (10):

$$z(x) = (\exp\lambda Bx)\Big(C + \int_0^x (\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt\Big). \tag{13}$$

Находим вектор C из условия (11), т.е. имеем

$$\Delta(\lambda)C + Q(\exp\lambda B)\int_0^1 (\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt = 0. \tag{14}$$

Считаем, что λ таково, что $\Delta^{-1}(\lambda)$ существует. Находя из (14) C и подставляя в (13), легко придем к (12), что и требовалось доказать.

Из (12) найдем нужное представление для R^0_λ. Собственными значениями матрицы B будут i и $-i$. Обозначим $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix}$. Тогда существует неособая матрица $\Gamma = (\gamma_{ij})^2_{i,j=1}$ такая, что $\Gamma^{-1}B\Gamma = D$. В дальнейшем будем обозначать одной и той же буквой γ различные постоянные, не зависящие от λ. Далее, обозначим:

$$r(\lambda x) = \gamma\exp\lambda ix + \gamma\exp(-\lambda ix),$$

$$q_1(x,\lambda;f) = \int_x^1 r\big(\lambda(1-t)\big)f(t)\,dt + \int_0^{1-x} r(\lambda t)f(t)\,dt,$$

$$q_2(x,\lambda;f) = \int_0^x r(\lambda t)f(t)\,dt + \int_{1-x}^1 r\big(\lambda(1-t)\big)f(t)\,dt.$$

Лемма 4. *Имеет место формула:*[2)]

$$R^0_\lambda f = \frac{1}{\delta(\lambda)}\big\{r(\lambda x)q_1(x,\lambda;f) + r\big(\lambda(1-x)\big)q_2(x,\lambda;f)\big\},$$

где $\delta(\lambda) = \det(P\Gamma + Q\Gamma\exp\lambda D)$.

[2)] Произведение $r(\lambda x)r(\lambda t)$ понимается так: $r(\lambda x)r(\lambda t) = \sum\gamma\exp\lambda i(\pm x \pm t)$.

Доказательство. Имеем

$$P\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}, \qquad Q\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q\Gamma \exp \lambda D = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \exp \lambda i & \gamma_{12} \exp(-\lambda i) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$P\Gamma + Q\Gamma \exp \lambda D = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \exp \lambda i & \gamma_{12} \exp(-\lambda i) \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}.$$

Считаем, что λ таково, что $\delta(\lambda) \neq 0$. Тогда матрица $P\Gamma + Q\Gamma \exp \lambda D$ неособая и пусть $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^2$ – матрица, обратная ей. Тогда для отыскания $t_{i,j}$ из соотношения

$$E = (P\Gamma + Q\Gamma \exp \lambda D)T$$

получаем следующие системы уравнений

$$\begin{cases} \gamma_{11}(\exp \lambda i)t_{11} + \gamma_{12}(\exp(-\lambda i))t_{21} = 1, \\ \gamma_{21}t_{11} + \gamma_{22}t_{21} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{11}(\exp \lambda i)t_{12} + \gamma_{12}(\exp(-\lambda i))t_{22} = 0, \\ \gamma_{21}t_{12} + \gamma_{22}t_{22} = 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$t_{11} = \delta^{-1}(\lambda)\gamma, \quad t_{21} = \delta^{-1}(\lambda)\gamma, \quad t_{12} = \delta^{-1}(\lambda)\gamma \exp(-\lambda i), \quad t_{22} = \delta^{-1}(\lambda)\gamma \exp \lambda i,$$

и поэтому

$$T = \frac{1}{\delta(\lambda)} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \exp(-\lambda i) \\ \gamma & \gamma \exp \lambda i \end{pmatrix}.$$

Обозначим $V = V_1 - V_2$, где

$$V_1 = P \int_0^x \bigl(\exp(-\lambda Bt)\bigr) BF(t)\, dt,$$

$$V_2 = Q(\exp \lambda B) \int_x^1 \bigl(\exp(-\lambda Bt)\bigr) BF(t)\, dt.$$

Положим $\Phi(t) = \Gamma^{-1}F(t), \Phi(t) = \{\Phi_1(t), \Phi_2(t)\}^T$. Тогда $\Phi_i(t) = \gamma f(t) + \gamma f(1-t)$. Имеем

$$\begin{aligned} V_1 &= P\Gamma \int_0^x (\exp(-\lambda Dt)) D\Gamma^{-1} F(t)\, dt \\ &= \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma \exp(-\lambda it) & \gamma \exp \lambda it \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^x \begin{pmatrix} 0 \\ (\exp(-\lambda it))(\gamma f(t) + \gamma f(1-t)) + (\exp \lambda it)(\gamma f(t) + \gamma f(1-t)) \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ q_2(x, \lambda; f) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично, $V_2 = \begin{pmatrix} q_1(x,\lambda;f) \\ 0 \end{pmatrix}$. Поэтому $V = \begin{pmatrix} q_1(x,\lambda;f) \\ q_2(x,\lambda;f) \end{pmatrix}$. Так как

$$(\exp\lambda Dx)T = \frac{1}{\delta(\lambda)} \begin{pmatrix} \gamma\exp\lambda ix & \gamma\exp(-\lambda i(1-x)) \\ \gamma\exp(-\lambda ix) & \gamma\exp\lambda i(1-x) \end{pmatrix},$$

то

$$(\exp\lambda Dx)TV = \frac{1}{\delta(\lambda)} \begin{pmatrix} (\exp\lambda ix)q_1 + (\exp(-\lambda i(1-x)))q_2 \\ (\exp(-\lambda ix))q_1 + (\exp\lambda i(1-x))q_2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{1}{\delta(\lambda)}\Gamma(\exp\lambda Dx)TV \\ &= \frac{1}{\delta(\lambda)} \begin{pmatrix} (\exp\lambda ix)q_1 + (\exp(-\lambda i(1-x)))q_2 + (\exp(-\lambda ix))q_1 + (\exp\lambda i(1-x))q_2 \\ \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Первая компонента $z(x)$ есть $R^0_\lambda f$. Лемма доказана.

Эта лемма позволяет получить нужные оценки R^0_λ при больших $|\lambda|$. Обозначим через S_{δ_1} область, получающуюся из всей λ-плоскости удалением нулей $\delta(\lambda)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_1. Рассмотрим лишь случай $\operatorname{Re}\lambda i \geqslant 0$, противоположный случай рассматривается аналогично. Тогда в S_{δ_1} справедливы оценки:

$$\delta^{-1}(\lambda) = O\big(\exp(-\lambda i)\big), \qquad r(\lambda x) = O(\exp\lambda ix).$$

Из леммы 4 очевидным образом получается

Лемма 5. *В области S_{δ_1} справедливы оценки:*

$$\|R^0_\lambda f\|_\infty = O(\|f\|_1).$$

Здесь $\|f\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup|f(x)|$, $\int_0^1 |f(t)|\,dt$.

Лемма 6. *В области S_{δ_1} справедливы оценки:*

$$\|R^0_\lambda f\|_{C[\delta,1-\delta]} = O\big(æ(\lambda,\delta)\|f\|_\infty\big), \tag{15}$$

где $æ(\lambda,\delta) = \dfrac{1}{\operatorname{Re}\lambda i}\{1 - |\exp(-\lambda i)\delta|\}$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

Доказательство. Имеем

$$\int_x^1 r\big(\lambda(1-t)\big)f(t)\,dt = \int_x^1 O\big(|f(t)|\,|\exp\lambda i(1-t)|\big)\,dt$$
$$= O\bigg(\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda i}\{|\exp\lambda i(1-x)| - 1\}\|f\|_\infty\bigg).$$

Эту оценку имеет и $\int_0^{1-x} r(\lambda t)f(t)\,dt$. Значит, эту оценку имеет и $q_1(x,\lambda;f)$. Для $q_2(x,\lambda;f)$ получаем аналогичную оценку:

$$q_2(x,\lambda;f) = O\bigg(\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda i}\{|\exp\lambda ix| - 1\}\|f\|_\infty\bigg).$$

Поэтому по лемме 4 получаем

$$R_\lambda^0 f = O\bigg(\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda i}(2 - |\exp(-\lambda ix)| - |\exp\lambda i(1-x)|)\|f\|_\infty\bigg).$$

Отсюда следует (15).

Лемма 7. *В S_{δ_1} справедлива оценка*:

$$\|R_\lambda^0 f\|_1 = O\big(æ(\lambda,1)\|f\|_1\big).$$

Доказательство. По лемме 4 имеем

$$\|R_\lambda^0 f\|_1 = O\bigg(\frac{1}{\delta(\lambda)}\int_0^1\bigg\{|\exp\lambda ix|\bigg(\int_x^1 |\exp\lambda i(1-t)|\,|f(t)|\,dt + \int_0^{1-x}|\exp\lambda it|\,|f(t)|\,dt\bigg)$$
$$+ |\exp\lambda i(1-x)|\bigg(\int_0^x |\exp\lambda it|\,|f(t)|\,dt + \int_{1-x}^1 |\exp\lambda i(1-t)|\,|f(t)|\,dt\bigg)\bigg\}\,dx\bigg). \quad (16)$$

Преобразуем каждое слагаемое правой части (16). Имеем

$$\int_0^1 |\exp\lambda ix|\,dx\int_x^1 |\exp(-\lambda it)|\,|f(t)|\,dt$$
$$= \int_0^1 |f(t)|\,dt\int_0^t |\exp\lambda i(x-t)|\,dx = \int_0^1 |f(t)|\frac{1 - |\exp(-\lambda it)|}{\operatorname{Re}\lambda i}\,dt.$$

Аналогично,

$$\int_0^1 |\exp\lambda ix|\,dx\int_0^{1-x}|\exp\lambda it|\,|f(t)|\,dt$$
$$=|\exp\lambda i|\int_0^1|f(1-t)|\frac{1-|\exp(-\lambda it)|}{\operatorname{Re}\lambda i}\,dt,$$
$$\int_0^1 |\exp(-\lambda ix)|\,dx\int_0^{x}|\exp\lambda it|\,|f(t)|\,dt$$
$$=\int_0^1|f(t)|\frac{1-|\exp(-\lambda i(1-t))|}{\operatorname{Re}\lambda i}\,dt,$$
$$\int_0^1 |\exp(-\lambda ix)|\,dx\int_{1-x}^{1}|\exp\lambda i(1-t)|\,|f(t)|\,dt$$
$$=\int_0^1|f(1-t)|\frac{1-|\exp(-\lambda i(1-t))|}{\operatorname{Re}\lambda i}\,dt.$$

Подставляя это в (16), придем к

$$\|R^0_\lambda f\|_1=O\Big(\int_0^1|f(t)|\frac{2-|\exp(-\lambda it)|-|\exp(-\lambda i(1-t))|}{\operatorname{Re}\lambda i}\,dt\Big)$$
$$=O\big(æ(\lambda,1)\|f\|_1\big),$$

что и требовалось доказать.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 8. *Пусть $\chi(x)$ – характеристическая функция отрезка $[\eta_0,\eta_1]$, где $0\leqslant\eta_0<\eta_1\leqslant 1$. Тогда в S_{δ_1}*

$$\|R^0_\lambda\chi\|_\infty=O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Лемма 9. *Обозначим $R_\lambda=(E-\lambda A)^{-1}A$. Тогда для любой $f(x)\in L[0,1]$*

$$\lim_{k\to\infty}\|\Omega_{r_k}(f)\|_{C[\delta,1-\delta]}=0, \tag{17}$$

где

$$\Omega_r(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}(R_\lambda f-R^0_\lambda f)\,d\lambda,$$

$r_k\uparrow+\infty$ и окружности $|\lambda|=r_k$ находятся в S_{δ_1}.

Доказательство. Имеем

$$R_\lambda = R_\lambda^0 - R_\lambda^0 N_1 DSR_\lambda. \tag{18}$$

Здесь $D = \dfrac{d}{dx}$, $Sf(x) = f(1-x)$, $N_1 = (E+N)^{-1} - E$ и $Nf(x) = \int_0^x A_x(x,t)f(t)\,dt$. Положим $y = R_\lambda f$. Тогда из (18) получаем интегро-дифференциальное уравнение:

$$y(x) = R_\lambda^0 f(x) - R_\lambda^0 NDSy(x), \tag{19}$$

причем $y(1) = 0$. Интегрируя по частям, из (19) имеем

$$y(x) = R_\lambda^0 f - R_\lambda^0 N_2 Sy(x), \tag{20}$$

где

$$N_2 f = \int_0^x N_2(x,t)f(t)\,dt = \int_0^x N_{1,t}(x,t)f(t)\,dt$$

(здесь мы воспользовались также тем, что $N_1(x,x) \equiv 0$). Покажем, что ядро интегрального оператора $R_\lambda^0 N_2$ в области S_{δ_1} есть $o(1)$. Рассмотрим $q_1(x,\lambda;N_2g)$. Имеем

$$q_1(x,\lambda;N_2g) = \int_x^1 r\big(\lambda(1-t)\big)N_2g(t)\,dt + \int_0^{1-x} r(\lambda t)N_2g(t)\,dt. \tag{21}$$

Первое слагаемое правой части (21) путем изменения порядка интегрирования приводит к виду

$$\int_x^1 r\big(\lambda(1-t)\big)N_2g(t)\,dt = \int_0^x g(\tau)\,d\tau \int_x^1 r\big(\lambda(1-t)\big)N_2(t,\tau)\,dt + \int_x^1 g(\tau)\,d\tau \int_\tau^1 r\big(\lambda(1-t)\big)N_2(t,\tau)\,dt.$$

Отсюда по лемме 4 из [2] получаем

$$\int_x^1 r\big(\lambda(1-t)\big)N_2g(t)\,dt = \int_0^1 o\big(\exp\lambda i(1-x)\big)|g(t)|\,dt.$$

Аналогично,

$$\int_0^{1-x} r(\lambda t)N_2g(t)\,dt = \int_0^{1-x} o\big(\exp\lambda i(1-x)\big)|g(t)|\,dt.$$

Поэтому

$$q_1(x,\lambda;N_2g) = \int_0^1 o\big(\exp\lambda i(1-x)\big)|g(t)|\,dt. \tag{22}$$

Аналогично,

$$q_2(x,\lambda;N_2g)=\int_0^1 o(\exp\lambda ix)|g(t)|\,dt. \tag{23}$$

По лемме 4 в силу (22) и (23) получаем

$$R_\lambda^0N_2g=\int_0^1 o(1)|g(t)|\,dt.$$

Поэтому интегральное уравнение (20) при больших $|\lambda|$ в области S_{δ_1} однозначно разрешимо и

$$y(x)=T_\lambda f=R_\lambda^0f+R_\lambda^0N_2S(E-R_\lambda^0N_2S)^{-1}R_\lambda^0f. \tag{24}$$

Займемся вторым слагаемым правой части (24). По леммам 6 и 7 имеем

$$\begin{aligned}\|R_\lambda^0N_2S(E-R_\lambda^0N_2S)^{-1}R_\lambda^0f\|_{C[\delta,1-\delta]}&=O\big(æ(\lambda,\delta)\|R_\lambda^0f\|_1\big)\\&=O\big(æ(\lambda,\delta)æ(\lambda,1)\|f\|_1\big).\end{aligned}$$

Поэтому из (24) получаем

$$\|R_\lambda f-R_\lambda^0f\|_{C[\delta,1-\delta]}=O\big(æ(\lambda,\delta)æ(\lambda,1)\|f\|_1\big).$$

Отсюда так же, как и в [2; с. 391–395], получаем $\|\Omega_r(f)\|_{C[\delta,1-\delta]}=O(\|f\|_1)$. Теперь по теореме Банаха–Штейнгауза в силу леммы 8 придем к (17). Лемма доказана.

Теорема 2. *Если* $A(x,t)$, $A_x(x,t)$, $A_t(x,t)$, $A_{xt}(x,t)$ *непрерывны при* $0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1$ *и* $A_{x^s}(x,x)=\delta_{0,s}$ $(s=0,1)$, *то справедливо заключение теоремы* 1.

Доказательство. Так как $\Omega_{r_k}(f)$ в (17) представляет собой разность частичных сумм разложений Фурье по с.п.ф. операторов A и A_0, то мы получаем равносходимость спектральных разложений A и A_0. В то же время с.п.ф. оператора A_0 совпадают с с.п.ф. оператора $y''(x)$, $y(1)=y'(0)=0$. А так как имеет место равносходимость разложений по с.п.ф. этого дифференциального оператора и в обычный тригонометрический ряд Фурье, то приходим к утверждению теоремы.

Список литературы

[1] Хромов А. П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // "Современные проблемы теории функций и их приложения". Тезисы докладов 9-й Саратовской зимней школы. Саратов, 1997. С. 162.

[2] Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114 (156). №3. С. 378–405.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского